ЕГЭ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

РЕШЕБНИК
МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1. РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ЧАСТЬ 2. РЕШЕНИЯ СБОРНИКА
ЗАДАЧ В ЭЛЕКТРОННОМ ВИДЕ
на www.legionr.ru

ПОДГОТОВКА
к ЕГЭ-2011

Разработано в соответствии
с Федеральным компонентом
государственного стандарта
общего образования

ЛЕГИОН ™

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

РЕШЕБНИК

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2011

Учебно-методическое пособие

Разработано в соответствии с Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования

™

ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2010

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *С. В. Дерезин* — ассистент каф. теории упругости ЮФУ,
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:
Войта Е. А., Евич Л. Н., Иванов С. О., Кулабухов С. Ю., Ольховая Л. С., Перетятькин Ф. Г., Резникова Н. М., Таран А. А., Тимофеенко И. В.

М34 Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2011 : учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 192 с. — (Готовимся к ЕГЭ)

ISBN 978-5-91724-053-4

Данный решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки школьников к ЕГЭ по математике. Он состоит из двух частей.

Часть I — пособие, которое Вы держите в руках. Оно содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов учебно-методического пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова за исключением решения варианта, представленного в самой книге.

Часть II — решения сборника задач, которые размещены в **электронном** виде на сайте издательства www.legionr.ru в свободном доступе (бесплатно).

Мы надеемся, что данная книга поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый ему материал и успешно подготовиться к ЕГЭ.

ББК 22.1

ISBN 978-5-91724-053-4

Оглавление

Решения вариантов тестов

Решение варианта №1

B1. Цена повысилась на 10%, то есть стала $30 + \frac{30 \cdot 10}{100} = 33$ (руб); $360 : 33 = 10\frac{10}{11}$. Значит, можно купить 10 наборов.

Ответ: 10.

B2. Наименьшая цена нефти определяется по графику как точка с наименьшим значением 70 долларов за один баррель нефти. Ей соответствует 25-й день на оси чисел месяца.

Ответ: 25.

B3. $5^{x-24} = \frac{1}{125}$, $5^{x-24} = 5^{-3}$, $x - 24 = -3$, $x = -3 + 24$, $x = 21$.

Ответ: 21.

B4. $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $AB = 20$; $AC = AB \cdot \cos A = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$. BC найдём из $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 400 - 144 = 256$, $BC = 16$.

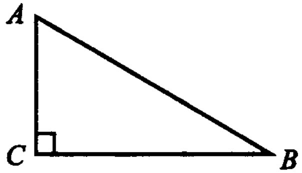


Рис. 1.

Ответ: 16.

B5. Площадь всех стёкол $10 \cdot 2{,}5 = 25$ м^2. Составим таблицу:

	Цена 25 м^2 стекла (руб)	**Резка и шлифовка 10 стёкол (руб)**	**Итого (руб)**
А	$220 \cdot 25 = 5\,500$	$185 \cdot 10 = 1\,850$	7 350
Б	$240 \cdot 25 = 6\,000$	$125 \cdot 10 = 1\,250$	7 250
В	$260 \cdot 25 = 6\,500$	$120 \cdot 10 = 1\,200$	7 700

Ответ: 7 250.

B6. Первый способ: площадь данного треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17{,}5$ см^2. Второй способ: площадь прямоугольника $BEFC$: $S_{BEFC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACF}$. Таким образом, $S_{\triangle ABC} = S_{BEFC} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACF} = 7 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 1}{2} - \frac{6 \cdot 5}{2} = 17{,}5$ см^2.

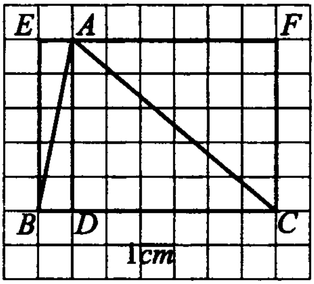


Рис. 2.

Ответ: 17,5.

B7. $4^{2+\log_4 7} = 4^2 \cdot 4^{\log_4 7} = 16 \cdot 7 = 112$

Ответ: 112.

B8. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Ответ: 1,4.

B9. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{\text{осн.}} \cdot AA_1 = AB \cdot AD \cdot AA_1$, $AD = 2R = 6$, $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 72$, $AA_1 = \frac{72}{6 \cdot 6} = \frac{72}{36} = 2$

Ответ: 2.

B10. $p = 105 - 7k$, k — цена продукции (тысяч рублей). $q = p \cdot k$, $q \geqslant 182$, $182 \leqslant (105 - 7k)k$, $-7k^2 + 105k - 182 \geqslant 0$, $7k^2 - 105k + 182 \leqslant 0$, $k^2 - 15k + 26 \leqslant 0$, $2 \leqslant k \leqslant 13$

Максимальный уровень цены k равен 13 тысяч рублей.

Ответ: 13.

B11. $y' = \left(5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 3\right)' = -5\sin x - \frac{24}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$. Наибольшим является значение

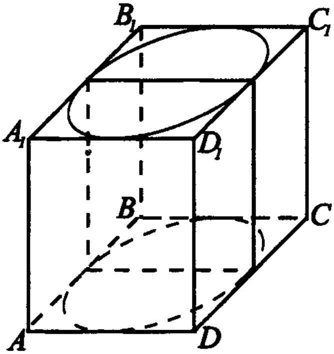


Рис. 3.

$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 5\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{24}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 3 = 16{,}5.$

Ответ: 16,5.

B12. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(12+x)$ км/ч — скорость катера по течению реки, а $(12-x)$ км/ч — скорость катера против течения. Время, затраченное катером на путь из пункта A в пункт B равно $\frac{20}{12-x}$. Время, затраченное катером на путь от B к A, с учетом времени на остановку в пункте B равно $\frac{20}{12+x}+\frac{1}{4}$. Общее время составляет 4 часа. Составим уравнение:

$\frac{20}{12+x}+\frac{1}{4}+\frac{20}{12-x}=4,$

$4\cdot 20\cdot(12-x)+(12+x)(12-x)+4\cdot 20\cdot(12+x)=4\cdot 4(12^2-x^2),$

$960-80x+12^2-x^2+960+80x=16(12^2-x^2),$

$960+960+114-2304=15x^2,\ \ 240=15x^2,\ \ x^2=16,\ \ x=\pm 4.$ При этом $x=-4$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4.

C1. $\begin{cases} y-\cos x=0, \\ (6\sqrt{\cos x}-1)(5y+4)=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\cos x, \\ 6\sqrt{\cos x}-1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=\cos x, \\ 5y+4=0, \\ \cos x \geqslant 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = \cos x, \\ \cos x = \dfrac{1}{36}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{4}{5}, \\ \cos x = -\dfrac{4}{5} \quad \text{— нет решений}, \\ \cos x \geqslant 0; \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{36}, \\ x = \pm \arccos \dfrac{1}{36} + 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm \arccos \dfrac{1}{36} + 2\pi n;\ \dfrac{1}{36}\right), n \in Z.$

C2. 1. Треугольник ABD — прямоугольный (см. рис. 4).
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20.$

2. Из точки A опустим перпендикуляр AK на прямую B_1D_1; $AK \perp B_1D_1$. Построим $KH \perp ABD$. Тогда $KH \perp A_1B_1D_1$, так как $A_1B_1D_1 \parallel ABD$. Следовательно, $\angle AKH$ — искомый линейный угол дву-

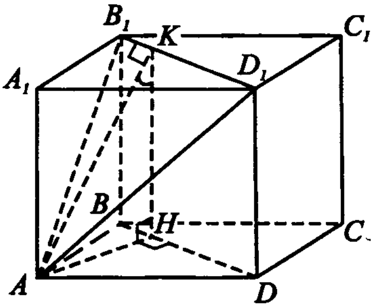


Рис. 4.

гранного угла между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

3. Из $\triangle ABD$ найдём AH: $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AH = 10AH$;

$S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AD = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$; $10AH = 96$; $AH = \dfrac{48}{5}$.

4. Из прямоугольного $\triangle AKH$ находим:
$\operatorname{tg} \angle AKH = \dfrac{AH}{KH} = \dfrac{48}{5 \cdot 9} = \dfrac{16}{15}$. Следовательно, $\angle AKH = \operatorname{arctg} \dfrac{16}{15}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \dfrac{16}{15}$.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{27}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{27}\right) \cup \left(-\frac{1}{27}; 0\right).$

Преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{x-1}\log_3 27}{\frac{1}{x-1}\left(\log_3 27 + \log_3(-x)\right)} \leqslant \frac{1}{\log_3(-x\log_3 3)}.$$

На ОДЗ имеем: $\dfrac{3}{3+\log_3(-x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_3(-x)}$.

Пусть $\log_3(-x) = t$, $t \neq -3$; $t \neq 0$. Тогда $\dfrac{3}{3+t} - \dfrac{1}{t} \leqslant 0$;

$\dfrac{2t-3}{t(3+t)} \leqslant 0$. Из рисунка 5 следует, что $t \in (-\infty; -3) \cup (0;\ 1{,}5]$. Тогда

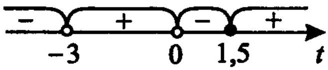


Рис. 5.

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < -3, \\ \begin{cases} \log_3(-x) > 0, \\ \log_3(-x) \leqslant 1{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < \log_3 \frac{1}{27}, \\ \begin{cases} \log_3(-x) > \log_3 1, \\ \log_3(-x) \leqslant \log_3 3^{\frac{3}{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{1}{27}, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -3\sqrt{3}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27}; +\infty\right)$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in [-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27};\ 0\right)$.

Ответ: $[-3\sqrt{3}; -1) \cup \left(-\frac{1}{27};\ 0\right)$.

С4. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x, FT = y, TK = z$. $MP = AK, AM = PK$. Точка F лежит между P и T, так как $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5} < 1$.

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 6). Треугольники MPT и AKF равнобедренные (для треугольника AKF: $\angle 1 = \angle 2$, так как

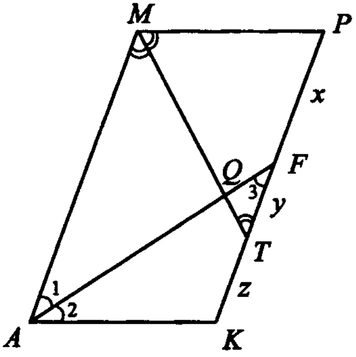


Рис. 6.

AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых AM и KP. Для треугольника MPT аналогично).

Тогда $x + y = MP = 24$; $y + z = AK = 24$; $x = z$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $x = 9$; $y = 15$; $z = 9$; $PK = x + y + z = 9 + 15 + 9 = 33$.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 7). Треугольники

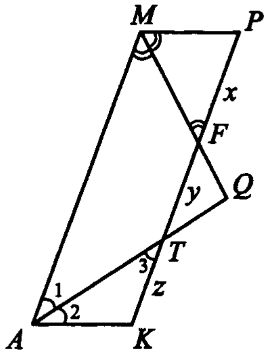


Рис. 7.

MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 24$; $z = AK = 24$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$; $y = \frac{5}{3}x = 40$; $PK = x + y + z = 24 + 40 + 24 = 88$.

Ответ: 33; 88.

С5. Данная задача равносильна следующей. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $f(x) > 2$ выполняется для всех x.

Преобразовав неравенство $f(x) > 2$ получим неравенство

$$ax + 4 > -|x^2 + 6x + 5|.$$

1) Рассмотрим функции $g(x) = ax + 4$ и $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$. На рисунке 8 изображены эскизы графиков функций $g(x)$ и $h(x)$.

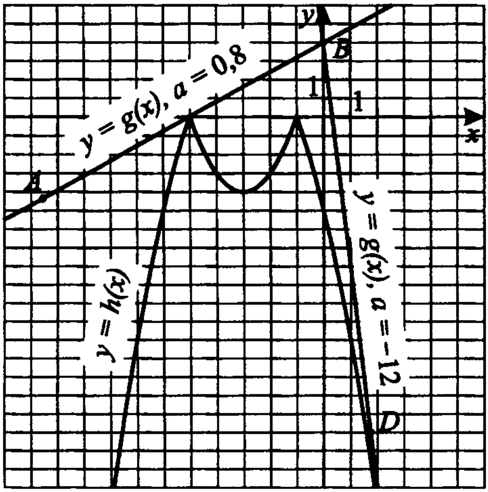


Рис. 8.

2) Отметим, что график функции $y = g(x)$ при любом значении параметра a проходит через точку B (0; 4).

Неравенство $g(x) > h(x)$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда график функции $y = g(x)$ не пересекает график функции $y = h(x)$, то есть когда график $y = g(x)$ проходит вне угла ABD. В этом случае $a_2 < a < a_1$, где прямая $y = a_1x + 4$ проходит через точку $(-5;\ 0)$ (прямая AB), а прямая $y = a_2x+4$ касается графика функции $y = -x^2-6x-5$ в точке x_0 при $x_0 > 0$ (прямая BD).

3) Так как $0 = a_1(-5) + 4$, то $a_1 = 0{,}8$. Отметим, что точка $(-5;\ 0)$ — единственная общая точка функций $g(x) = 0{,}8x + 4$ и $h(x)$. Это можно проверить, например, решив уравнение $0{,}8x + 4 = h(x)$.

4) Найдём уравнение касательной к графику функции $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$, проходящей через точку B (0; 4) и точку касания $(x_0;\ y_0)$ при $x_0 > 0$:

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-4}{y_0-4};\ y = \frac{y_0-4}{x_0} \cdot x + 4.$$

$\frac{y_0-4}{x_0}=h'(x_0)=(-x_0^2-6x_0-5)'=-2x_0-6$; $y_0-4=-x_0(2x_0+6)$; $(-x_0^2-6x_0-5)-4=-2x_0^2-6x_0$; $x_0^2=9$. Так как $x_0>0$, то $x_0=3$. Тогда $a_2\cdot 3+4=-(3^2+6\cdot 3+5)$; $a_2=-12$.

Ответ: $(-12;\ 0{,}8)$.

С6. 1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(7+8+\ldots+15)(3+4+\ldots+8)=\frac{7+15}{2}\cdot 9\cdot\frac{3+8}{2}\cdot 6=3267.$$

2. Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 3267, нечётен. Следовательно, наименьшее по абсолютной величине значение также является нечётным натуральным числом. Значит, меньше единицы оно быть не может. Но единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(-7-8-9+10-11+12+13-14+15)\cdot(-3+4-5+6+7-8)=1\cdot 1=1.$$

Ответ: 1; 3267.

Решение варианта №2

В1. Цена снижена на 20%, то есть на $\frac{100\cdot 20}{100}=20$ (руб.). Цена стала 80 (руб.); $500:80=6\frac{1}{4}$. Купить можно шесть калькуляторов.

Ответ: 6.

В2. Используя рисунок, достаточно найти точку с наименьшим значением цены нефти — 71,5 долларов США. Ему соответствует число 6.

Ответ: 6.

В3. $4^{x-11}=\frac{1}{64}$, $4^{x-11}=4^{-3}$, $x-11=-3$, $x=8$

Ответ: 8.

В4. $\cos B=\frac{BC}{AB}$, $\frac{4}{5}=\frac{BC}{15}$, $BC=\frac{4\cdot 15}{5}$, $BC=12$. $AC^2=$ $=AB^2-BC^2$, $AC^2=225-144=81$, $AC=9$.

Ответ: 9.

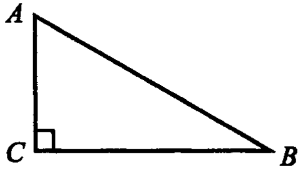


Рис. 9.

В5. Площадь всех стёкол: $24 \cdot 0{,}4 = 9{,}6$ м^2. Составим таблицу:

	Цена 9,6 м^2 стекла (руб)	**Резка и шлифовка 24 стёкол (руб)**	**Итого (руб)**
А	$320 \cdot 9{,}6 = 3\,072$	$54 \cdot 24 = 1\,296$	4 368
Б	$380 \cdot 9{,}6 = 3\,648$	$43 \cdot 24 = 1\,032$	4 680
В	$360 \cdot 9{,}6 = 3\,456$	$52 \cdot 24 = 1\,248$	4 704

Ответ: 4 368.

В6. Площадь данного треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \dfrac{AB \cdot CD}{2} = \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 10$ см^2.

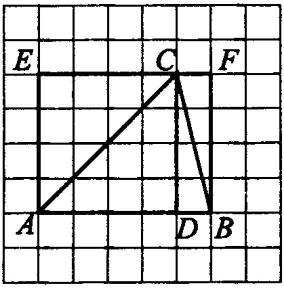


Рис. 10.

Ответ: 10.

В7. $5^{2+\log_5 12} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 12} = 25 \cdot 12 = 300$.

Ответ: 300.

В8. Значение производной $f(x)$ в точке x_0 есть значение тангенса угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси Ox. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

B9. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{\text{осн.}} \cdot h$, так как сторона основания равна $2R$, то $S_{\text{осн.}} = (2R)^2 = 4R^2$, $S_{\text{осн.}} = 4 \cdot 25 = 100$. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} =$ $= 100 \cdot 7 = 700$.

Ответ: 700.

B10. $q = 24 - p$, $r = q \cdot p$, $r \geqslant 40$, $q \cdot p \geqslant 40$, $(24 - 2p)p \geqslant 40$, $24p - 2p^2 - 40 \geqslant 0$, $p^2 - 12p + 20 \leqslant 0$, $2 \leqslant p \leqslant 10$. Максимальный уровень цены — 10 тысяч рублей.

Ответ: 10.

B11. $y' = \left(2\cos x - \frac{18}{\pi}x + 1\right)' = -2\sin x - \frac{18}{\pi}$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $[-\frac{2}{3}\pi; 0]$. Наибольшим является значение $y\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) - \frac{18}{\pi} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 12 + 1 = 12$.

Ответ: 12.

B12. Пусть x км/ч — скорость течения реки, тогда $(5+x)$ км/ч — скорость моторной лодки по течению реки, а $(5 - x)$ км/ч — скорость против течения. Общее время в пути составило 8 часов. Время, затраченное на путь от A до B равно $\left(\frac{14}{5+x} + 1\frac{1}{3}\right)$ часов. Время, затраченное на путь от B до A, равно $\left(\frac{14}{5-x}\right)$ часов. Составим уравнение: $\frac{14}{5+x} + 1\frac{1}{3} + \frac{14}{5-x} = 8$, $\frac{14}{5+x} + \frac{14}{5-x} - 6\frac{2}{3} = 0$, $\frac{7}{5+x} + \frac{7}{5-x} - \frac{10}{3} = 0$, $3(7(5-x) + 7(5+x)) - 10(5^2 - x^2) = 0$, $10x^2 = 40$, $x = \pm 2$. При этом $x = -2$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 2.

C1. $$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ (8\sqrt{\sin x} - 1)(3y - 4) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \sin x, \\ 8\sqrt{\sin x} - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \sin x, \\ 3y - 4 = 0, \\ 0 \leqslant \sin x \leqslant 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = \sin x, \\ \sin x = \dfrac{1}{64}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}, \\ \sin x = \dfrac{4}{3} \text{ — нет решений}, \end{cases} \\ 0 \leqslant \sin x \leqslant 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{64}, \\ x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{64} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin \frac{1}{64} + \pi n;\ \frac{1}{64}\right), n \in Z.$

С2. 1. Из точки A опустим перпендикуляр на прямую BD; $AK \perp BD$ (см. рис. 11).

Прямая AK является проекцией A_1K на плоскость нижнего основания. Так как $AK \perp BD$, то $A_1K \perp BD$ по теореме о трёх перпендикулярах. Тогда $\angle AKA_1$ — линейный угол искомого двугранного угла между плоскостями ABD и A_1BD.

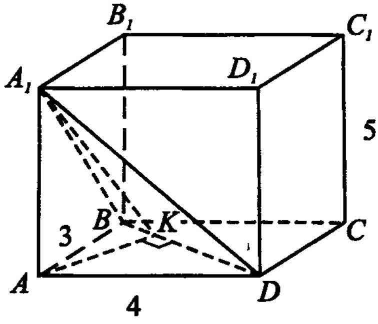


Рис. 11.

2. Так как ΔABD — прямоугольный, то $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$.

3. Из ΔABD найдём AK: $S_{ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AK$, $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD$;

$BD \cdot AK = AB \cdot AD$; $AK = \dfrac{AB \cdot AD}{BD} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$.

4. Из прямоугольного ΔAA_1K находим: $\operatorname{tg} \angle AKA_1 = \dfrac{A_1A}{AK} = 3{,}75$; $\angle AKA_1 = \operatorname{arctg} 3{,}75$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 3{,}75$.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -\frac{1}{4}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -8; \end{cases} \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty; -8) \cup (-8; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right).$

Преобразуем исходное неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{x+8}\log_2 4}{\frac{1}{x+8}\left(\log_2 4 + \log_2(-x)\right)} \leqslant \frac{1}{\log_2(-x\log_2 2)}.$$

На ОДЗ имеем:

$$\frac{2}{2+\log_2(-x)} \leqslant \frac{1}{\log_2(-x)}.$$

Пусть $\log_2(-x) = t, t \neq -2; t \neq 0$. Тогда $\frac{2}{2+t} - \frac{1}{t} \leqslant 0;$

$\frac{t-2}{t(2+t)} \leqslant 0$. Из рисунка 12 следует, что $t \in (-\infty; -2) \cup (0;\ 2]$. Тогда

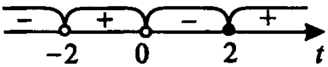


Рис. 12.

$\left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < -2, \\ \begin{cases} \log_2(-x) > 0, \\ \log_2(-x) \leqslant 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < \log_2 \frac{1}{4}, \\ \begin{cases} \log_2(-x) > \log_2 1, \\ \log_2(-x) \leqslant \log_2 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -\frac{1}{4}, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right).$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4};\ 0\right).$

Ответ: $[-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{4};\ 0\right).$

С4. Пусть Q — точка пересечения биссектрис, $PF = x, FT = y, TK = z.$ $MP = AK, AM = PK$. Точка F лежит между P и T, так как $\frac{x}{y} = \frac{2}{11} < 1.$

Возможны два случая.

1. Точка Q лежит внутри параллелограмма (см. рис. 13).

Треугольники MPT и AKF равнобедренные (для треугольнике AKF: $\angle 1 = \angle 2$, так как AF — биссектриса $\angle A$; $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых AM и KP. Для треугольника MPT аналогично). Тогда $x + y = MP = 26$; $y + z = AK = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{11}$; $x = 4$; $y = 22$; $z = 4$; $AM = x + y + z = 4 + 22 + 4 = 30$.

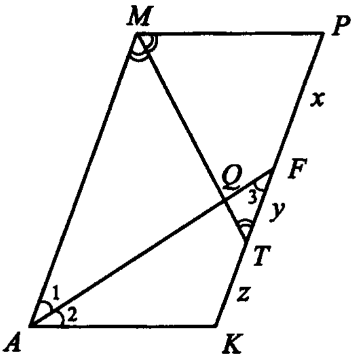


Рис. 13.

2. Точка Q лежит вне параллелограмма (см. рис. 14). Треугольники

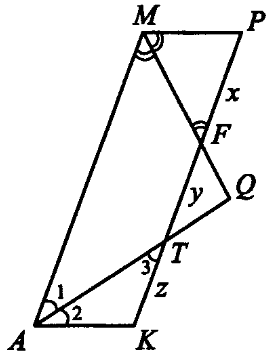


Рис. 14.

MPF и AKT равнобедренные. Тогда $x = MP = 26$; $z = AK = 26$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{11}$; $y = \frac{11 \cdot 26}{2} = 143$; $AM = PK = x + y + z = 26 + 143 + 26 = 195$.

Ответ: 30; 195.

С5. Данная задача равносильна следующей. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $f(x) < 1$ имеет решение.

Преобразовав неравенство $f(x) < 1$, получим неравенство

$$2ax + 4 < -|x^2 + 6x + 5|.$$

Рассмотрим функции $g(x) = 2ax + 4$ и $h(x) = -|x^2 + 6x + 5|$. На рисунке 15 изображены эскизы графиков функций $g(x)$ и $h(x)$.

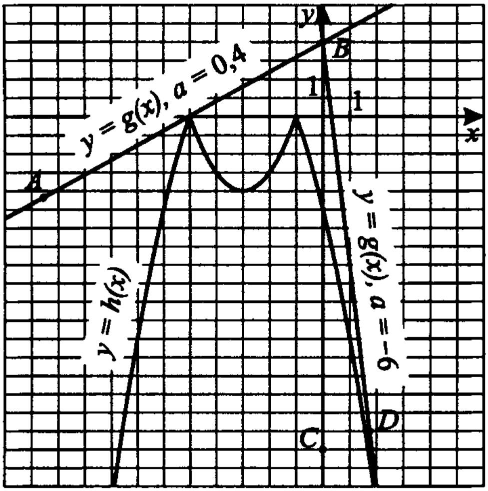


Рис. 15.

Отметим, что график функции $y = g(x)$ при любом значении параметра a проходит через точку B (0; 4).

Неравенство $g(x) < h(x)$ имеет решение тогда и только тогда, когда график функции $y = g(x)$ пересекает график функции $y = h(x)$, то есть когда график $y = g(x)$ проходит внутри угла ABD. Рассмотрим два случая.

1) График функции $y = g(x)$ проходит внутри угла ABC. Тогда $a \in (a_1; +\infty)$, где a_1 — значение параметра a, при котором график функции $y = 2a_1x + 4$ проходит через точку $(-5;\ 0)$. Так как $0 = 2a_1(-5) + 4$, то $a_1 = 0{,}4$. Отметим, что точка $(-5;\ 0)$ — единственная общая точка функций $g(x) = 2 \cdot 0{,}4x + 4$ и $h(x)$. Это можно проверить, например, решив уравнение $2 \cdot 0{,}4x + 4 = h(x)$.

2) График функции $y = g(x)$ проходит внутри угла CBD. Тогда $a \in (-\infty;\ a_2)$, где a_2 — значение параметра a, при котором график функции $y = 2a_2x + 4$ касается графика функции $y = h(x)$. Найдём уравнение

касательной к графику функции $h(x) = -|x^2+6x+5|$, проходящей через точку B $(0;\ 4)$ и точку касания $(x_0;\ y_0)$ при $x_0 > 0$:

$\dfrac{x-0}{x_0-0} = \dfrac{y-4}{y_0-4}$; $y = \dfrac{y_0-4}{x_0}\cdot x + 4$.

$\dfrac{y_0-4}{x_0} = h'(x_0) = (-x_0^2-6x_0-5)' = -2x_0-6$; $y_0-4 = -x_0(2x_0+6)$;
$(-x_0^2-6x_0-5)-4 = -2x_0^2-6x_0$; $x_0^2 = 9$. Так как $x_0 > 0$, то $x_0 = 3$. Тогда $2a_2\cdot 3+4 = -(3^2+6\cdot 3+5)$; $a_2 = -6$.

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(0{,}4;+\infty)$.

C6. 1. Наибольшая сумма получится, если все слагаемые взять со знаком плюс. Но тогда эта сумма всевозможных произведений равна произведению

$$(5+6+\ldots+13)(11+12+\ldots+20) = \frac{5+13}{2}\cdot 9\cdot\frac{11+20}{2}\cdot 10 = 12\,555.$$

2. Расстановка знаков в полученной сумме всевозможных произведений не меняет чётности результата. Но один из результатов, а именно 12 555, нечётен. Следовательно, наименьшее по абсолютной величине значение также является нечётным натуральным числом. Значит, меньше единицы оно быть не может. Но единица может быть получена, например, следующим образом:

$$(5+6-7+8-9+10-11+12-13)\cdot$$
$$\cdot(-11+12-13+14-15+16+17-18+19-20) = 1\cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1; 12 555.

Решение варианта №4

B1. После понижения цены одна тетрадь будет стоить $0{,}9\cdot 50 = 45$ рублей. Так как $570 : 45 = 12\frac{2}{3}$, то наибольшее число тетрадей равно 12.

Ответ: 12.

B2. Из рисунка видно, что наибольшая цена алюминия на момент закрытия биржевых торгов была достигнута 6 марта и составила 3190 долларов США за тонну.

Ответ: 3190.

B3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = 625$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$; $3x+2 = -4$; $3x = -6$; $x = -2$.

Ответ: -2.

B4. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2-BC^2} = \sqrt{29^2-21^2} = 20$ (см.

рис. 16). Тогда $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21}{20} = 1{,}05$.

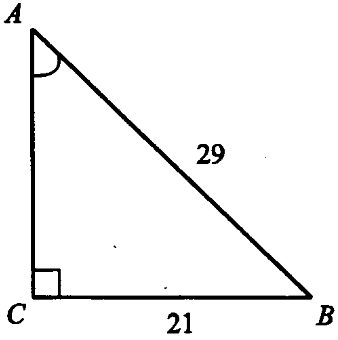


Рис. 16.

Ответ: 1,05.

B5. Поставка А: $80 \cdot 2\,450 + 8\,000 = 204\,000$ (руб).

Поставка Б: $80 \cdot 2\,600 = 208\,000$ (руб).

Поставка В: $80 \cdot 2\,400 + 8\,500 = 200\,500$ (руб). Самая дешевая покупка обойдется в 200 500 рублей.

Ответ: 200 500.

B6. Из рисунка видно, что основание треугольника (на рисунке это горизонтальный отрезок) равно 6, а высота также равна 6. Следовательно, его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$.

Ответ: 18.

B7. $2^{\log_2 7+3} = 2^{\log_2 7} \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56$.

Ответ: 56.

B8. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси Ox. Из рисунка 17 следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

B9. Прямоугольный параллелепипед, описанный около сферы, является кубом, ребро которого $a = 2R$, где R — радиус вписанной сферы. Его объем $V = a^3 = (2R)^3 = (2 \cdot 2,5)^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

B10. По условию: $r \geqslant 300$. Тогда $q \cdot r \geqslant 300$; $(150 - 12p) \cdot p \geqslant 300$;

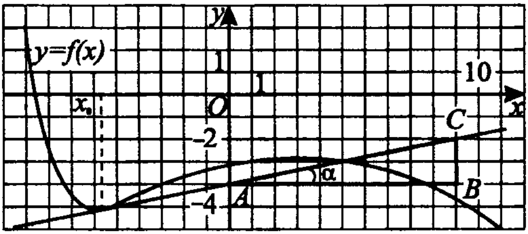


Рис. 17.

$\frac{5}{2} \leqslant p \leqslant 10.$

Ответ: 10.

B11. $y' = \left(3x + 4\operatorname{ctg} x - 1 - \frac{3}{4}\pi\right)' = 3 - \frac{3}{\sin^2 x} = 3\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) =$ $= 3\left(1 - \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)\right) = -3\operatorname{ctg}^2 x$. Видно, что $y'(x) < 0$ для любого $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ и наибольшее значение равно $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot 1 - 1 - \frac{3}{4} \cdot \pi = 2.$

Ответ: 2.

B12. Пусть x — скорость мотоциклиста в км/ч. Тогда $(x-60)$ — скорость велосипедиста. Из условия задачи следует уравнение $\frac{50}{x-60} - \frac{50}{x} = 2\frac{2}{3}$; $x_1 = -15, x_2 = 75$. Так как скорость мотоциклиста выражается положительным числом, то $x = 75$.

Ответ: 75.

C1. ОДЗ: $\sin x \geqslant 0$. Из второго уравнения получаем: $y = \frac{4}{5}$ или $\sin x = \frac{4}{9}$. Если $y = \frac{4}{5}$, то из первого уравнения $\sin x = -\frac{4}{5}$ — не удовлетворяет ОДЗ. Если $\sin x = \frac{4}{9}$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и из первого уравнения получаем: $y = -\frac{4}{9}$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right), n \in \mathbb{Z}$.

C2. Пусть H — проекция точки N на плоскость основания, SO — высота пирамиды, M — середина BC (см. рис. 18). Тогда $\angle NCH$ — искомый.

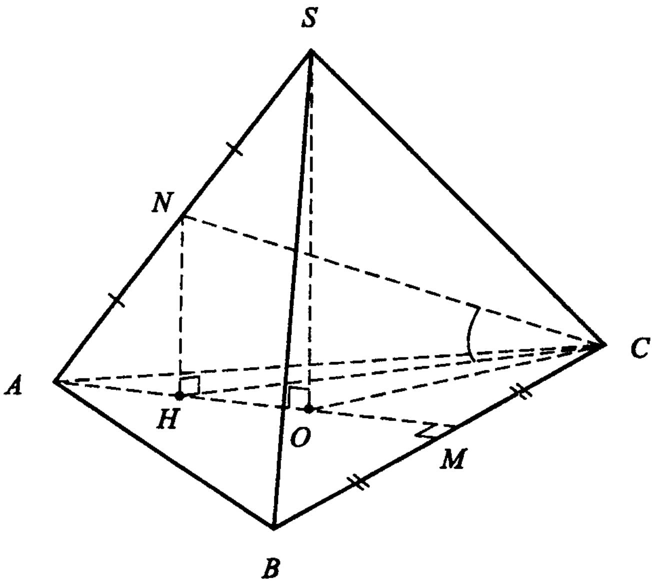


Рис. 18.

Так как $\triangle ANH \sim \triangle ASO$ (оба прямоугольника имеют общий острый угол при вершине A), то $\frac{NH}{SO} = \frac{AN}{AS} = \frac{1}{2} \Rightarrow NH = \frac{SO}{2}$. $AO = \frac{2}{3}AM$ (O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$), $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $AO = 1$. Тогда $NH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Из подобия треугольников ANH и ASO следует, что $HO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$. $CO = AO = 1$. Так как $\triangle AOC$ — равнобедренный, AO и OC — биссектрисы равностороннего $\triangle ABC$, то $\angle AOC = \angle HOC = 120°$. По теореме косинусов для треугольника HOC получим:

$CH^2 = HO^2 + CO^2 - 2 \cdot HO \cdot CO \cdot \cos\angle HOC = \frac{1}{4} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$;

$CH = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NCH = \frac{NH}{CH} = 1$; $\angle NCH = 45°$.

Ответ: 45°.

С3. Пусть $t = 3^{-x^2}, 0 < t \leqslant 1$. Тогда неравенство принимает вид: $\log_7 \frac{t-8}{3^{26}\cdot t-3} + \log_7\Big(\big(t-8\big)\big(3^{26}\cdot t-3\big)\Big) > \log_7(27t-1)^2$. Так как

$t-8<0$, то $3^{26}\cdot t-3<0$; $0<t<\frac{1}{3^{25}}$. Тогда

$$\begin{cases} \log_7(8-t)^2 > \log_7(27t-1)^2, \\ 0<t<\frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-t)^2 > (27t-1)^2, \\ 0<t<\frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8-t > 1-27t, \\ 0<t<\frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{7}{26}, \\ 0<t<\frac{1}{3^{25}}; \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{3^{25}}.$$

Значит, $3^{-x^2} < 3^{-25} \Leftrightarrow x^2 > 25 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$.

С4. Возможны два случая.

1. Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 19).

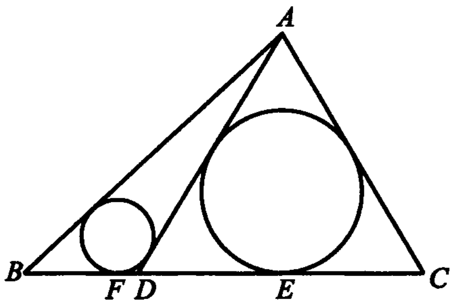


Рис. 19.

Тогда $BD = \frac{2}{7}BC = 4$; $DC = BC - BD = 10$. По теореме косинусов для треугольника ABC: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos C$; $\cos C = \frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2\cdot BC\cdot AC} = \frac{14^2+10^2-4\cdot 39}{2\cdot 14\cdot 10} = \frac{1}{2}$. По теореме косинусов для треугольника ADC: $AD^2 = DC^2 + AC^2 - 2\cdot DC\cdot AC\cdot\cos C$; $AD = \sqrt{10^2+10^2-2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}} = 10$. Так как отрезки касательных, проведенные к окружностям из одной точки, равны, то из треугольника

ADC следует, что $2DE = AD + DC - AC$; $DE = \dfrac{AD + DC - AC}{2} = 5$.
Аналогично, из треугольника ABD получаем: $2DF = AD + BD - AB$;
$DF = \dfrac{AD + BD - AB}{2} = 7 - \sqrt{39}$. Тогда $EF = DF + DE = 12 - \sqrt{39}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 20).

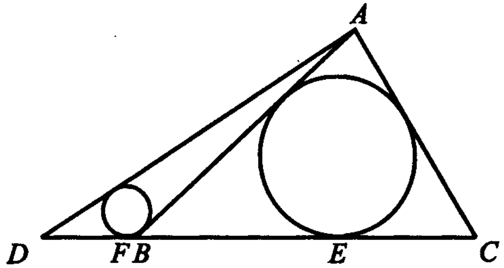


Рис. 20.

Тогда, обозначив $BD = x$, получим: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{x}{x+14} = \dfrac{2}{5}$.

$x = BD = \dfrac{28}{3}, DC = \dfrac{70}{3}$. Аналогично п. 1 получим:

$DE = \dfrac{AD + DC - AC}{2}, DF = \dfrac{AD + BD - AB}{2}$. Тогда

$$EF = DE - DF = \frac{1}{2}\left(AD + DC - AC - AD - BD + AB\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB + DC - AC - BD\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{39} + \frac{70}{3} - 10 - \frac{28}{3}\right) = \sqrt{39} + 2.$$

Ответ: $12 - \sqrt{39}; 2 + \sqrt{39}$.

С5. $f(x) = x^2 + 5x|x - a^2| - 13x = \begin{cases} x^2 - 18x + 5a^2, x < a^2; \\ x^2 - 8x - 5a^2, x \geqslant a^2. \end{cases}$

График $f(x)$ составлен их двух частей парабол, ветви которых направлены вверх, причем части парабол «склеиваются» в точке $\left(a^2; f(a^2)\right)$. Из рисунка 21 следует, что при любом расположении точки a^2 относительно вершин парабол, функция $f(x)$ не имеет точек максимума.

Ответ: таких a нет.

С6. 1. Если все числа первого набора взяты со знаком «+», а второго — со знаком «−», то сумма максимальна и равна

$9 \cdot (2 + 3 + \dots + 8) - 7(-20 - 21 - \dots - 28) =$

$$= 9 \cdot \frac{2+8}{2} \cdot 7 + 7 \cdot \frac{20+28}{2} \cdot 9 = 1827.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней нечётно, причём это свойство суммы не зависит от знака любого её слагаемого. Поэтому любая из возможных сумм будет нечётной, то есть отличной от нуля.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей перестановке знаков:

$9 \cdot (2+3-4+5+6-7-8) + 7 \cdot (20+21+22+23+24-25-$
$-26-27-28) = 9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = -27 + 28 = 1.$

Ответ: 1; 1827.

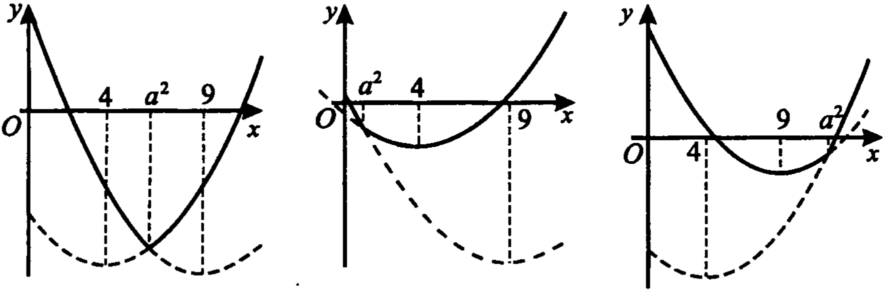


Рис. 21.

Решение варианта №5

B1. Так как 6 булок стоят $6 \cdot 14{,}5 = 87 < 100$ рублей, а 7 булок стоят $101{,}5 > 100$ рублей, то купить можно 6 булок.

Ответ: 6.

B2. Так как покупать выгоднее по наименьшей цене, то нужно найти по графику точку наименьшего значения в период с 1 по 30 ноября. Это 2-е ноября.

Ответ: 2.

B3. $\sqrt{7x+1} = 6 \Leftrightarrow 7x+1 = 36 \Leftrightarrow 7x = 35 \Leftrightarrow x = 5.$

Ответ: 5.

B4. Так как $\angle A = \angle B$, то $\triangle ABC$ равнобедренный с основанием AB; биссектриса CH является медианой и высотой. Отсюда $AH = \dfrac{AB}{2} = 4$; $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$. $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{3}{4}$. Из прямоугольного $\triangle AHC$: $CH = AH\,\text{tg}\,A = 4 \cdot \dfrac{3}{4} = 3$.

Ответ: 3.

B5. Экономия от одной поездки на автобусе составляет $14 - 9 = 5$ рублей. Всего $30 \cdot 2 = 60$ поездок, поэтому общая экономия составит $60 \cdot 5 = 300$ рублей.

Ответ: 300.

B6. Примем за основание сторону треугольника, расположенную вертикально. Тогда длина основания — 4 см, длина высоты — 6 см, площадь — $\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12\,(\text{см}^2)$.

Ответ: 12.

B7. $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125.

B8. Из условия следует, что касательная проходит через точки с координатами $(0;0)$ и $(5;5)$. Искомое значение $f'(5)$ равно тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс, поэтому $f'(5) = \dfrac{5-0}{5-0} = 1$.

Ответ: 1.

B9. Так как $V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн}} \cdot h$, а $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$, то $V_{\text{цилиндра}} = 3V_{\text{конуса}} = 3 \cdot 15 = 45$.

Ответ: 45.

B10. $r = qp = p(12 - p)$. По условию $r \geqslant 35$, то есть $p(12 - p) \geqslant 35$; $p^2 - 12p + 35 \leqslant 0$; корнями трёхчлена в левой части являются $p_1 = 5$ и $p_2 = 7$, поэтому $p \in [5; 7]$. Максимальное значение $p = 7$.

Ответ: 7.

B11. $y' = -e^{2-x} - (5 - x)e^{2-x} = (x - 6)e^{2-x}$.
$y' = 0$ при $x = 6$; $y' < 0$ при $x < 6$; $y' > 0$ при $x > 6$. $x = 6$ — точка минимума.

Ответ: 6.

B12. Обозначим скорость первого велосипедиста через v (км/ч). Тогда скорость второго велосипедиста равна $(v + 10)$, а на всю дорогу они потратили $\dfrac{60}{v}$ и $\dfrac{60}{v+10}$ часов соответственно. Получаем уравнение:

$\dfrac{60}{v} = \dfrac{60}{v+10} + 0{,}5 + 0{,}5$; $60v + 600 = 60v + v^2 + 10v$; $v^2 + 10v - 600 = 0$;

$v_1 = 20$ и $v_2 = -30$. Так как скорость положительна, то $v = 20$.

Ответ: 20.

С1. Обозначим $\sqrt{\sin x} = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда из первого уравнения получаем $y = -t^2$, а из второго: $(3t-2)(-6t^2-3) = 0 \Leftrightarrow (t - \frac{2}{3})(t^2 + \frac{1}{2}) = 0$

Уравнение $t^2 + \frac{1}{2} = 0$ не имеет действительных корней, поэтому $t = \frac{2}{3}$;

$y = -\frac{4}{9}$; $\sin x = \frac{4}{9}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left((-1)^n \arcsin\frac{4}{9} + \pi n; -\frac{4}{9}\right)$, $n \in Z$.

С2. Так как параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямой, то
$\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90°$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:
$AC = AA_1 \operatorname{ctg}\angle ACA_1 = CC_1 \operatorname{ctg}\angle ACA_1 = 1 \cdot 2 = 2$.
$BD = DD_1 \operatorname{ctg}\angle DBD_1 = CC_1 \operatorname{ctg}\angle DBD_1 = 1 \cdot 4 = 4$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$. Искомый объём вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} 4^{x-5} \neq 1 \\ -256x > 0 \\ -256x \neq 1 \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x > 0 \\ \log_{\frac{1}{4}} 4^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{256} \\ x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -\frac{1}{256} \\ x \neq -1 \end{cases}$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{1}{\log_{64}(-256x)} \leqslant \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow \frac{4}{\log_4(-256x)} \leqslant \frac{1}{\log_4(-x)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4 + \log_4(-x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_4(-x)}$. Пусть $\log_4(-x) = t$, тогда

$$\frac{3}{4+t} \leqslant \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{3t - t - 4}{t(4+t)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2t-4}{t(t+4)} \leqslant 0$$

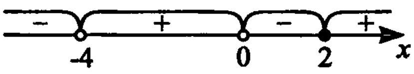


Рис. 22.

$t < -4$; $0 < t \leqslant 2$

$\log_4(-x) < -4$; $0 < \log_4(-x) \leqslant 2$
$-x < 4^{-4}$; $1 < -x \leqslant 16$
$x > -\frac{1}{256}$; $-16 \leqslant x < -1$.

Учитывая ОДЗ, получаем:

$x \in [-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right)$.

Ответ: $[-16; -1) \cup \left(-\frac{1}{256}; 0\right)$.

С4. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 23). $\angle DAN = \angle BNA$ (накрестлежащие при $AD \parallel BC$ и

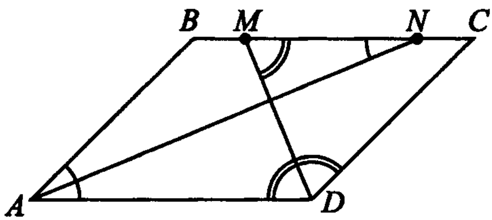


Рис. 23.

секущей AN) $\Rightarrow \triangle ABN$ равнобедренный: $BN = AB = 20$. Аналогично, $MC = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1{,}5BM$; $BN = BM + MN = 2{,}5BM$; $2{,}5BM = 20$; $BM = 8$; $MN = 1{,}5 \cdot 8 = 12$; $BC = BM + MC = 8 + 20 = 28$.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 24). Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 20$

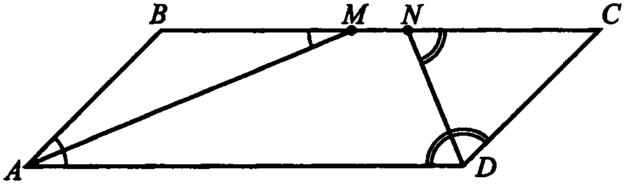


Рис. 24.

и $CN = CD = 20$. Так как $BM : MN = 2 : 3$, то $MN = 1{,}5BM = 30$. $BC = BM + MN + CN = 20 + 30 + 20 = 70$.

Ответ: 28 или 70.

С5. $f(x) = 4ax + |(x-3)(x-5)| =$
$$= \begin{cases} x^2 + (4a-8)x + 15, x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ -x^2 + (4a+8)x - 15, x \in [3; 5]. \end{cases}$$

Наименьшее значение достигается в одной из критических или стационарных точек.

Критические: 1) $x = 3$. Тогда $f(3) = 12a$.

2) $x = 5$. Тогда $f(5) = 20a$.

Стационарные: 1) $x = 4 - 2a$ при $4 - 2a \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, то есть $a \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty) \Leftrightarrow |a| > 0{,}5$.
$f(4-2a) = (4-2a)^2 + 2(2a-4)(4-2a) + 15 = -4a^2 + 16a - 1$.

2) $x = 2a + 4$ при $2a + 4 \in (3; 5) \Leftrightarrow |a| < 0{,}5$.
$f(2a+4) = -(2a+4)^2 + 2(2a+4)^2 - 15 = 4a^2 + 16a + 1$.

Чтобы наименьшее значение $f(x)$ было меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы значение $f(x)$ в одной из критических или стационарных точек было меньше 1. То есть:

$$\left[\begin{array}{l} f(3) < 1 \\ f(5) < 1 \\ \begin{cases} f(4-2a) < 1 \\ |a| > 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} f(2a+4) < 1 \\ |a| < 0{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12a < 1 \\ 20a < 1 \\ \begin{cases} -4a^2 + 16a - 1 < 1 \\ |a| > 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} 4a^2 + 16a + 1 < 1 \\ |a| < 0{,}5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a < \dfrac{1}{12} \\ \begin{cases} 2a^2 - 8a + 1 > 0 \\ |a| > 0{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последняя система была исключена из совокупности, так как не имеет решений. Решим систему $\begin{cases} 2a^2 - 8a + 1 > 0, \\ |a| > 0{,}5. \end{cases}$ Корнями трёхчлена будут:

$$a_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{14}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

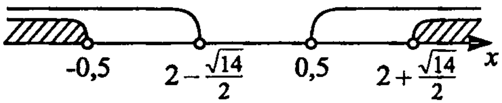


Рис. 25.

$a \in (\infty; -0{,}5) \cup \left(2 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$. Объединяя это множество с множеством

$\left(-\infty; \frac{1}{12}\right)$, получаем: $a \in \left(-\infty; \frac{1}{12}\right) \cup \left(2+\frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{12}\right) \cup \left(2+\frac{\sqrt{14}}{2}; +\infty\right)$.

C6. Наибольшая сумма достигается, если перед каждым произведением поставить знак плюс:
$S_{max} = (3+4+\ldots+11)\cdot(13+14+15+16+17) = 63\cdot 75 = 4725$.
Заметим, что если поменять знак перед произведением, значение которого равно k, то общая сумма изменится на величину $2k$ и её чётность останется прежней. Так как найденная максимальная сумма нечётна, то при любой расстановке знаков сумма будет нечётной, следовательно, не равной нулю. Покажем, как построить сумму, равную единице:
$S_{min} = 3\cdot(13-14+15-16+17)+4\cdot(-13-14+15-16+17)+$
$+(5+6+7-8-9+10-11)\cdot(13+14+15+16+17) =$
$= 3\cdot 15+4\cdot(-11)+0\cdot 75 = 45-44 = 1$.

Ответ: 1 и 4725.

Решение варианта №6

B1. Так как 12 бутылок стоят $12\cdot 15{,}5 = 186 < 200$ рублей, а 13 бутылок стоят $201{,}5 > 200$ рублей, то купить можно 12 бутылок, а в них $12\cdot 1{,}5 = 18$ литров воды.

Ответ: 18.

B2. Так как продавать выгоднее по наибольшей цене, то нужно найти по графику точку наибольшего значения в период с 1 по 30 ноября. Это 30-е ноября.

Ответ: 30.

B3. $\sqrt{10-2x} = 4 \Leftrightarrow 10-2x = 16 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$.

Ответ: -3

B4. CH является медианой равнобедренного $\triangle ABC$, следовательно, и высотой. Поэтому $AB = 2AH = 2AC\cos A = 2\cdot 10\cdot 0{,}6 = 12$.
$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$. Из $\triangle ACH$:

$CH = AC\sin A = 10\cdot 0{,}8 = 8$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH =$

$= \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48$.

Ответ: 48.

B5. Экономия от одной поездки на автобусе составляет $14-9=5$ рублей. Всего 30 поездок, поэтому общая экономия составит $30\cdot 5=150$ рублей.

Ответ: 150.

B6. Примем за основание сторону треугольника, расположенную горизонтально. Тогда длина основания — 2 см, длина высоты — 4 см, площадь — $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4\,(\text{см}^2)$.

Ответ: 4.

B7. $9^{\frac{\ln 6}{\ln 3}}=(3^2)^{\log_3 6}=(3^{\log_3 6})^2=6^2=36.$

Ответ: 36.

B8. Из условия задачи следует, что касательная проходит через точки с координатами $(0;0)$ и $(6;-3)$. Искомое значение $f'(6)$ равно тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс, поэтому $f'(6)=\frac{-3-0}{6-0}=-0{,}5.$

Ответ: $-0{,}5$.

B9. Пусть высота цилиндра равна h. Тогда из формулы объёма цилиндра $V_{\text{цил.}}=\pi R^2 h$ можно выразить квадрат радиуса окружности в основании цилиндра: $R^2=\frac{V}{\pi h}=\frac{\pi\sqrt{3}}{\pi h}=\frac{\sqrt{3}}{h}$. Тогда квадрат стороны треугольника в основании пирамиды равен: $a^2=3R^2=\frac{3\sqrt{3}}{h}$. Площадь этого треугольника равна: $S_\Delta=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4h}=\frac{9}{4h}$. Объём пирамиды равен: $V_{\text{пир.}}=\frac{1}{3}S_\Delta h=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4h}\cdot h=\frac{3}{4}=0{,}75.$

Ответ: 0,75.

B10. $r=qp=p(120-10p)$. По условию $r\geqslant 320$, то есть $p(120-10p)\geqslant 320$; $p^2-12p+32\leqslant 0$; корнями трёхчлена в левой части являются $p_1=4$ и $p_2=8$, поэтому $p\in[4;8]$. Максимальное значение $p=8$.

Ответ: 8.

B11. $y'=e^{x-6}+(x-7)e^{x-6}=(x-6)e^{x-6}$.
$y'=0$ при $x=6$. $y(1)=-6e^{-5}$; $y(6)=-1$; $y(7)=0$. Наименьшее значение равно -1.

Ответ: -1.

B12. Обозначим через x расстояние от A до B в километрах. Тогда
$\frac{x}{20}=\frac{x}{30}+1$; $3x=2x+60$; $x=60\,(\text{км})$.

Ответ: 60.

С1. ОДЗ: $\cos x > 0$. Из второго уравнения системы: $\ln(\cos x) + 1 = 0$ или $y - 1 = 0$.

1) $\ln(\cos x) + 1 = 0$; $\ln(\cos x) = -1$; $\cos x = \dfrac{1}{e}$. $x = \pm \arccos \dfrac{1}{e} + 2\pi n$, $n \in Z$; $y = -\dfrac{3\cos x}{2} = -\dfrac{3}{2e}$.

2) $y - 1 = 0$; $y = 1$; $\cos x = -\dfrac{2}{3}$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\left(\pm \arccos \dfrac{1}{e} + 2\pi n; -\dfrac{3}{2e}\right)$, $n \in Z$.

С2. Так как параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямой, то
$\angle CAA_1 = \angle BDD_1 = 90°$. Из прямоугольных $\triangle CAA_1$ и $\triangle BDD_1$:
$AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle ACA_1 = 2 \cdot 3 = 6$.
$BD = DD_1 \operatorname{ctg} \angle DBD_1 = CC_1 \operatorname{ctg} \angle DBB_1 = 2 \cdot 4 = 8$.

По теореме Пифагора: $AB^2 = \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $AB = 5$.

Периметр $P_{ABCD} = 4AB = 20$. Площадь боковой поверхности параллелепипеда: $S_{\text{бок.}} = CC_1 \cdot P_{ABCD} = 2 \cdot 20 = 40$.

Ответ: 40.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} 2^{x+4} \neq 1 \\ -16x > 0 \\ -16x \neq 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x < 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{16} \\ x < 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \neq -\dfrac{1}{16} \\ x \neq -1 \\ x \neq -4. \end{cases}$

На ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{1}{\log_8(-16x)} \leqslant \frac{1}{\log_2(-x)} \Leftrightarrow \frac{3}{4 + \log_2(-x)} \leqslant \frac{1}{\log_2(-x)}.$$

Пусть $\log_2(-x) = t$, тогда $\dfrac{3}{4+t} \leqslant \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow \dfrac{2t-4}{t(t+4)} \leqslant 0$.

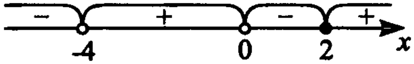


Рис. 26.

Из рисунка 26 следует, что $t < -4$; $0 < t \leqslant 2$;
$\log_2(-x) < -4$; $0 < \log_2(-x) \leqslant 2$;
$-x < 2^{-4}$; $1 < -x \leqslant 2^2$;

$x > -\frac{1}{16}$; $-4 \leqslant x < -1$.

Учитывая ОДЗ, получаем: $x \in (-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right)$.

Ответ: $(-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{16}; 0\right)$.

С4. Возможны два случая.

1) Биссектрисы при стороне AD пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 27). $\angle DAN = \angle BNA$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AN) $\Rightarrow$ $\triangle ABN$ равнобедренный и $BN = AB = 40$. Аналогично, $MC = CD = 40$. Так как $BM : MN = 3 : 5$, то $MN = \frac{5}{3}BM$; $BN = BM + MN = \frac{8}{3}BM$; $\frac{8}{3}BM = 40$; $BM = 15$; $MN = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$; $BC = BM + MC = 15 + 40 = 55$.

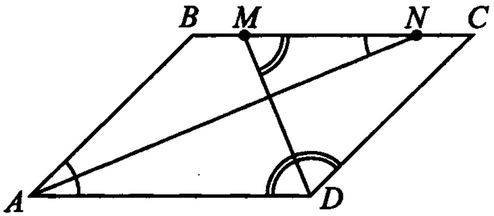


Рис. 27.

2) Биссектрисы при стороне AD не пересекаются внутри параллелограмма (см. рис. 28). Аналогично предыдущему случаю $BM = AB = 40$

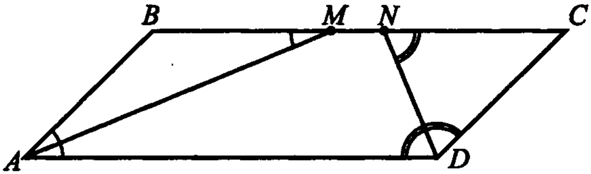


Рис. 28.

и $CN = CD = 40$. Так как $BM : MN = 3 : 5$, то $MN = \frac{5}{3}BM = \frac{200}{3}$.

$BC = BM + MN + CN = 40 + \frac{200}{3} + 40 = 146\frac{2}{3}$.

Ответ: $55; 146\frac{2}{3}$.

С5. $f(x) = 4ax + |(x-3)(x-5)| =$
$= \begin{cases} x^2 + (4a-8)x + 15, \text{ при } x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty), \\ -x^2 + (4a+8)x - 15, \text{ при } x \in [3; 5]. \end{cases}$

Наибольшее значение достигается в одной из критических или стационарных точек, или на одном из концов отрезка $[2{,}75; 5{,}25]$.

Критические: 1) $x = 3$. Тогда $f(3) = 12a$.

2) $x = 5$. Тогда $f(5) = 20a$.

Стационарные: 1) $x = 4 - 2a$ при $4 - 2a \in (2{,}75; 3) \cup (5; 5{,}25) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2a \in (-1{,}25; -1) \cup (1; 1{,}25) \Leftrightarrow a \in (-0{,}625; -0{,}5) \cup (0{,}5; 0{,}625)$
$f(4-2a) = (4-2a)^2 + 2(2a-4)(4-2a) + 15 = -4a^2 + 16a - 1.$

2) $x = 2a + 4$ при $2a + 4 \in (3; 5) \Leftrightarrow |a| < 0{,}5$.
$f(-2a-4) = -(2a+4)^2 + 2(2a+4)^2 - 15 = 4a^2 + 16a + 1.$

Чтобы наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[2{,}75; 5{,}25]$ было меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы значение $f(x)$ в каждой из критических и стационарных точек, а также на концах отрезка было меньше 1.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(2{,}75) < 1 \\ f(3) < 1 \\ f(5) < 1 \\ f(5{,}25) < 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} f(4-2a) < 1 \\ a \notin (-0{,}625; -0{,}5) \cup (0{,}5; 0{,}625) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} f(2a+4) < 1 \\ |a| \geqslant 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 11a + \frac{9}{16} < 1 \\ 12a < 1 \\ 20a < 1 \\ 21a + \frac{9}{16} < 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -4a^2 + 16a - 1 < 1 \\ a \in (-\infty; -0{,}625] \cup [-0{,}5; 0{,}5] \cup [0{,}625; +\infty) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 4a^2 + 16a + 1 < 1 \\ |a| \geqslant 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < \frac{7}{176} \\ a < \frac{1}{12} \\ a < \frac{1}{20} \\ a < \frac{1}{48} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2a^2 - 8a + 1 > 0 \\ a \in (-\infty; -0{,}625] \cup [-0{,}5; 0{,}5] \cup [0{,}625; +\infty) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a(a+4) < 0 \\ |a| \geqslant 0{,}5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим первую совокупность. Корнями трёхчлена $2a^2-8a+1$ являются $a_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$. $a \in (-\infty; 0{,}5] \cup [0{,}625; +\infty)$.

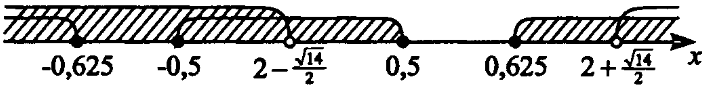


Рис. 29.

Решим вторую совокупность: $a \in (-\infty; 0) \cup [0{,}5; +\infty)$.

Рис. 30.

Система равносильна:

$$\begin{cases} a < \frac{1}{48} \\ a \in (-\infty; 0{,}5] \cup [0{,}625; +\infty) \\ a \in (-\infty; 0) \cup [0{,}5; +\infty) \end{cases}$$

Решением системы является $a \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$.

С6. Заметим, что алгебраическая сумма частных чисел $2, 3, \ldots, 6, 7$ и $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{17}$ равна соответствующей алгебраической сумме произведений чи-

сел 2, 3,..., 6, 7 и 8, 9,..., 17. Наибольшего значения эта сумма достигает, если перед каждым слагаемым поставить знак плюс:
$S_{max} = (2+3+\ldots+7)\cdot(8+9+\ldots+17) = 27\cdot 125 = 3375.$

Заметим, что если поменять знак перед произведением, значение которого равно k, то общая сумма изменится на величину $2k$, и её чётность останется прежней. Так как найденная максимальная сумма нечётна, то при любой расстановке знаков сумма будет нечётной, следовательно, не равной нулю.

Покажем, как построить сумму, равную 1:
$S_{min} = (2+3-4+5-6-7+8)\cdot(8-9-10+11+12-13-14+15-16+17) = 1\cdot 1 = 1.$

Ответ: 1 и 3375.

Решение варианта №7

B1. Стоимость одной поездки на такси составляет $60+10\cdot 7 = 130$ рублей, стоимость поездок на такси за неделю (туда и обратно) равна $130\cdot 2\cdot 3 = 780$ рублей. Стоимость проезда в троллейбусе за неделю (туда и обратно) — $8\cdot 3\cdot 2 = 48$ рублей. Тогда за неделю Ярослав потратит на $780-48 = 732$ рублей больше, если будет ездить на такси вместо троллейбуса.

Ответ: 732.

B2. По рисунку определяем, что 9 ноября евро стоил 35 рублей, а 20 ноября — 36 рублей. Таким образом, купив евро 9, а продав 20 ноября, человек получит по одному рублю дохода на каждый евро, то есть всего 100 рублей.

Ответ: 100.

B3. $\sqrt{5x-3} = 2\sqrt{x}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 5x-3 \geqslant 0; \end{cases}$ $x \geqslant 0{,}6$.

Возведем в квадрат обе части уравнения, получим $5x-3 = 4x$, $x = 3$. $x = 3$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 3.

B4. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AH\cdot BH}{2}$ (см. рис. 31).

$$BH = AB\cdot\sin\angle A = AB\cdot\sin\angle C = 20\cdot\frac{3}{5} = 12,$$

$$AH = \sqrt{AB^2-BH^2} = 16.\ S_{\triangle ABH} = \frac{16\cdot 12}{2} = 96.$$

Ответ: 96.

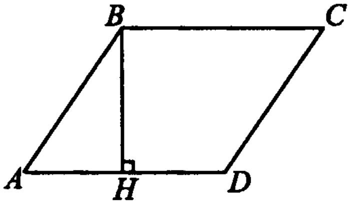


Рис. 31.

B5. 3 билета 1 категории стоят $3 \cdot 450 = 1350$,
3 билета 2 категории стоят $3 \cdot 250 = 750$,
3 билета 3 категории — $3 \cdot 150 = 450$.
Итак, если покупать билеты отдельно, то придется потратить $2550 < 3000$ рублей, значит, это самый дешевый вариант.

Ответ: 2550.

B6. $S_{ABCD} = S_{AMCN} - S_{\triangle AMB} - S_{\triangle CDN} = AN \cdot AM - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 -$

$- \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4 - 6 - 4 = 24 - 6 - 4 = 14$ (см. рис. 32).

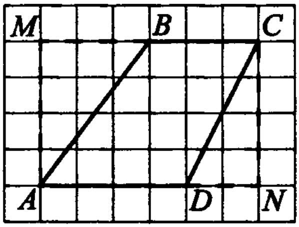


Рис. 32.

Ответ: 14.

B7. $\frac{\log_7 \sqrt[5]{35}}{\log_7 35} = \frac{1}{5} = 0{,}2$; т.к. $\log_7 \sqrt[5]{35} = \frac{1}{5} \log_7 35$.

Ответ: 0,2.

B8. Так как касательная параллельна прямой $y = 1$, то ее угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику определяем, что производная обращается в ноль при $x = 5$.

Ответ: 5.

B9. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h$, $V_{DABC} = \frac{1}{3} DO \cdot S_{\triangle ABC}$ (см. рис. 33).

$S_{\triangle ABC} = 3R^2\sqrt{3}$, тогда $V_{DABC} = \frac{1}{3} h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2 h\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, откуда

$R^2h = \frac{1}{\pi}$. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$.

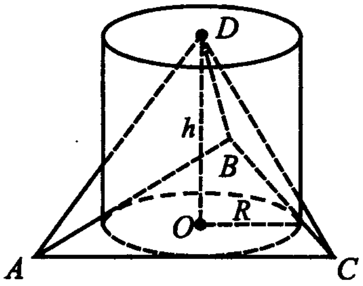


Рис. 33.

Ответ: 1.

B10. $V \geqslant \frac{3}{7}$; $\frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \geqslant \frac{3}{7}$; $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1 + \sqrt{S_2} + S_2) \geqslant \frac{7}{3}$;

$\frac{1}{3}(\sqrt{S_2} + S_2) \geqslant \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$; $\sqrt{S_2} + S_2 - 6 \geqslant 0$; $(\sqrt{S_2} + 3)(\sqrt{S_2} - 2) \geqslant 0$;

$\sqrt{S_2} \geqslant 2$; $S_2 \geqslant 4$.

Наименьшая площадь S_2, удовлетворяющая условию, равна 4.

Ответ: 4.

B11. $y = (x-8)e^{5-x}$, $y' = e^{5-x} - (x-8)e^{5-x} = (1 - x + 8)e^{5-x} =$
$= (9-x)e^{5-x}$; $y' = 0$ при $x = 9$.

$x = 9$ — точка максимума исходной функции (см. рис. 34).

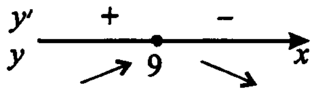


Рис. 34.

Ответ: 9.

B12. Пусть x км — расстояние от пункта А до пункта В.
Скорость автомобилиста равна $60 \cdot 2 = 120$ (км/ч). Время, затраченное мотоциклистом на прохождение полпути, равно $\frac{x}{60 \cdot 2} = \frac{x}{120}$ (ч), а автомобилистом — $\frac{x}{2 \cdot 120} = \frac{x}{240}$ (ч). По условию автомобилист выехал из пункта B на 1 час позже, чем мотоциклист из пункта А.
Составим уравнение:

$\frac{x}{240}+1=\frac{x}{120}$; $\frac{x}{120}-\frac{x}{240}=1$; $2x-x=240$; $x=240$.

Ответ: 240.

C1. $\begin{cases} y+\sin x=0, \\ (\ln|\sin x|-2)(2\sin y-1)=0; \end{cases}$

$\begin{cases} y+\sin x=0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\sin y=1, \\ \ln(\sin x)-2=0; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y+\sin x=0, \\ \left[\begin{array}{l} y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z, \\ \sin x=e^2; \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x=-y, \\ y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x=-y, \\ y=\frac{\pi}{6}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z, \\ y=\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}\right), n\in Z$.

C2. На рисунке 35 плоскость PMN — плоскость α.

PN — пересечение плоскостей ABC и PMN, а так как плоскость PMN параллельна прямой BD, содержащейся в плоскости ABC, то $PN \parallel BD$.

$AC \perp BD$ как диагонали квадрата, $PN \parallel BD$, тогда $AC \perp PN$.

Пусть H — проекция точки M на плоскость основания пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $AM \perp PN$, и тогда угол MAC является углом между плоскостью α и плоскостью основания.

Так как пирамида правильная, то боковые ребра равны между собой, тогда треугольник SAC равнобедренный, а так как угол при его основании равен $\frac{\pi}{6}=60°$, то он равносторонний. Так как MA является медианой равностороннего треугольника, то она является его биссектрисой и

$\angle MAC=\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

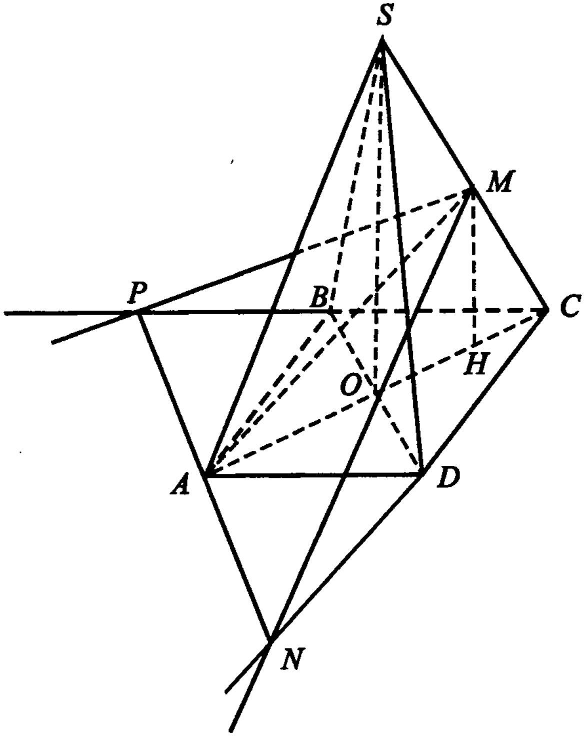


Рис. 35.

С3. $\log_2\left(\left(2^{-x^2}-4\right)\left(2^{-x^2+1}-1\right)\right)-\log_2\dfrac{2^{-x^2}-4}{2^{-x^2+1}-1}\geqslant\log_2\left(2^{5-x^2}-8\right)^2.$

ОДЗ. $\begin{cases}\left(2^{-x^2}-4\right)\left(2^{-x^2+1}-1\right)>0,\\ 2^{5-x^2}-8\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2^{-x^2+1}-1<0,\\ 2^{5-x^2}\neq 2^3;\end{cases}$

$\begin{cases}-x^2+1<0,\\ x^2\neq 2;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|>1,\\ |x|\neq\sqrt{2}.\end{cases}$

$$\log_2\frac{\left(2^{-x^2}-4\right)\left(2^{-x^2+1}-1\right)\left(2^{-x^2+1}-1\right)}{\left(2^{-x^2}-4\right)}\geqslant\log_2\left(32\cdot 2^{-x^2}-8\right)^2,$$

$\log_2\left(2^{-x^2+1}-1\right)^2\geqslant\log_2\left(32\cdot 2^{-x^2}-8\right)^2,$

$|2^{-x^2+1}-1|\geqslant|32\cdot 2^{-x^2}-8|,$

$1-2\cdot 2^{-x^2}\geqslant|32\cdot 2^{-x^2}-8|,$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}32\cdot 2^{-x^2}-8\geqslant 0,\\ 1-2\cdot 2^{-x^2}\geqslant 32\cdot 2^{-x^2}-8,\end{cases}\\ \begin{cases}32\cdot 2^{-x^2}-8<0,\\ 1-2\cdot 2^{-x^2}\geqslant 8-32\cdot 2^{-x^2};\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\leqslant\sqrt{2},\\ 2^{-x^2}\leqslant\dfrac{9}{34},\end{cases}\\ \begin{cases}|x|>\sqrt{2},\\ 2^{-x^2}\geqslant\dfrac{7}{30};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\leqslant\sqrt{2},\\ -x^2\leqslant\log_2\dfrac{9}{34},\end{cases}\\ \begin{cases}|x|>\sqrt{2},\\ -x^2\geqslant\log_2\dfrac{7}{30};\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|\leqslant\sqrt{2},\\ |x|\geqslant\sqrt{\log_2\dfrac{34}{9}},\end{cases}\\ \begin{cases}|x|>\sqrt{2},\\ |x|\leqslant\sqrt{\log_2\dfrac{30}{7}};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\sqrt{\log_2\frac{34}{9}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\log_2\frac{30}{7}}.$$

Учитывая ОДЗ, получим $\sqrt{\log_2\frac{34}{9}}\leqslant|x|<\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<|x|\leqslant\sqrt{\log_2\frac{30}{7}}$.

Ответ: $\sqrt{\log_2\frac{34}{9}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\log_2\frac{30}{7}}$, $|x|\neq\sqrt{2}$.

C4. Для треугольника ABC выполняется равенство $AC^2+BC^2=AB^2$, значит, он прямоугольный с прямым углом C.

Возможны два случая.

1) Точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 36).

Пусть $DB=x$, тогда $CD=4+x$. Так как $BC:BD=3:1$, то $(4+x):x=3:1$, $4+x=3x$, $x=2$. Итак, $DB=2$, $CD=6$.

$AD=\sqrt{AC^2+DC^2}=3\sqrt{5}$.

Так как отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, то $HC=3-a$, $DH=DE=DA-AE=3\sqrt{5}-a$. $DC=CH+DH$,

$6=(3-a)+(3\sqrt{5}-a)$, $a=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{2}$.

Аналогично находим $b=\dfrac{3\sqrt{5}-3}{2}$ и тогда

$EF=AD-AE-FD=AD-a-b=3$.

2) Точка D лежит внутри CB (см. рис. 37).

Аналогично первому случаю, находим $BD=1$, $AD=3\sqrt{2}$,

$AE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $FD=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2$ и тогда $EF=AD-AE-FD=2$.

Ответ: 2; 3.

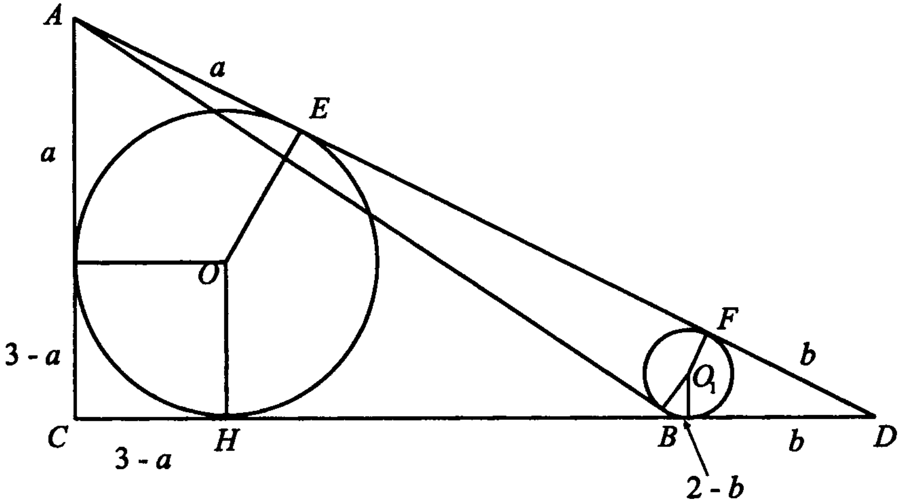


Рис. 36.

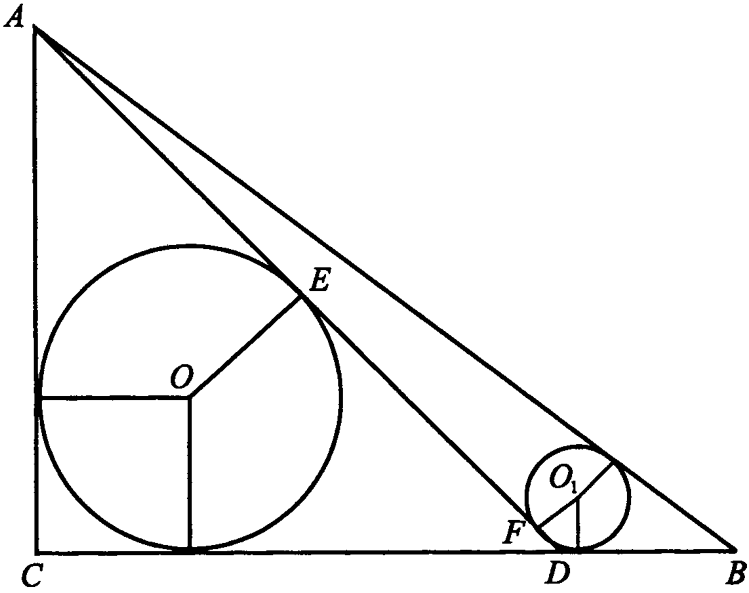


Рис. 37.

С5. $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$.

1. $x \geqslant a^2$, $f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 3x = x^2 - 5x + 2a^2$.

$f'(x) = 2x - 5$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{5}{2}$.

2. $x < a^2$, $f(x) = x^2 + 2(x - a^2) - 3x = x^2 - x - 2a^2$.

$f'(x) = 2x - 1$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

При $x \geqslant a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{5}{2}$.

При $x < a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{1}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

Функция $y = f(x)$ имеет хотя бы одну точку максимума в единственном случае (см. рис. 38): $\frac{1}{2} < a^2 < \frac{5}{2}$, $\sqrt{0{,}5} < |a| < \sqrt{2{,}5}$.

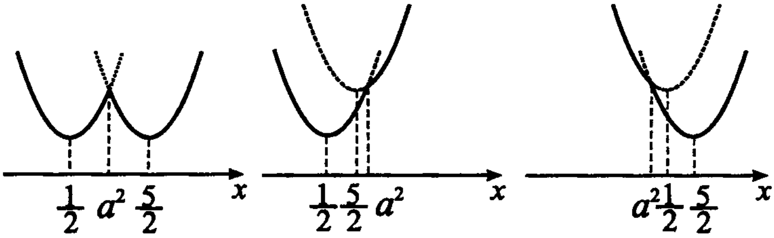


Рис. 38.

Ответ: $\sqrt{0{,}5} < |a| < \sqrt{2{,}5}$.

С6. После указанных действий получим алгебраическую сумму всех чисел первого набора с выбранными знаками, умноженную на 5 (количество чисел второй группы), и сумму всех чисел второго набора с выбранными знаками, умноженную на 9 (количество чисел первой группы).

Алгебраическая сумма максимальна, если все слагаемые положительны. Поставив перед каждым из чисел знак плюс, получим:

$5 \cdot (3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 9 \cdot (13 + 14 + 15 + 16 + 17) =$
$= 315 + 675 = 990$.

Наименьшая возможная по модулю сумма равна 0 и достигается при

следующей расстановке знаков:
$5\cdot(-3-4-5-6+7+8+9+10+11)+9\cdot(-13+14-15+16-17)=0.$

Ответ: 0; 990.

Решение варианта №8

B1. На 40 км потребуется $6{,}7\cdot\dfrac{40}{100}=2{,}68$ литров бензина. Один литр стоит 22 рубля, значит, за весь бензин придется заплатить $2{,}68\cdot 22=58{,}96$ рублей.

Два билета на автобус стоят $32\cdot 2=64$ рубля, значит, поездка на автомобиле обойдется на $64-58{,}96=5{,}04$ рубля дешевле.

Ответ: 5,04.

B2. По графику определяем цены евро:
2 ноября — 30 рублей,
15 ноября — 32 рубля,
20 ноября — 36 рублей.

Купив 100 евро второго ноября, а продав 20-го, получаем выгоду $100\cdot(36-30)=600$ рублей, а купив 15-го, получаем выгоду $100\cdot(36-32)=400$ рублей. Значит, первый вариант выгоднее на $600-400=200$ рублей.

Ответ: 200.

B3. $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{1-x}$.

ОДЗ: $\begin{cases}4-2x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\leqslant 2,\\ x\leqslant 1;\end{cases}\quad x\leqslant 1.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:
$4-2x=4(1-x)$, $-2x+4x=4-4$, $x=0$.

Ответ: 0.

B4. $\triangle CDH=\triangle ABE$ (см. рис. 39), $S_{\triangle CDH}=S_{\triangle ABE}=\dfrac{BE\cdot AE}{2}$.

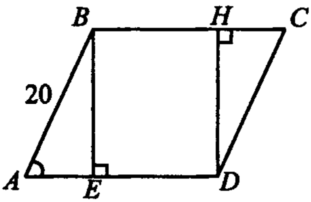


Рис. 39.

$AE = AB \cdot \cos A = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16$; $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{400 - 256} =$
$= \sqrt{144} = 12$.

$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.

Ответ: 96.

B5. Билеты третьей категории наиболее дешевые, и, купив все из них, получим $1600 - 150 \cdot 5 = 1600 - 750 = 850$ рублей. Из оставшихся наиболее дешевые билеты второй категории. $850 : 250 = 3{,}4$, значит, можно купить 3 таких билета, после чего останется 100 рублей. То есть человек сможет посетить только 8 матчей.

Ответ: 8.

B6. $S_{ABCD} = S_{BEFA} - S_{\triangle BEC} - S_{ADF}$ (см. рис. 40).

$S_{BEFA} = 3 \cdot 6 = 18$; $S_{\triangle BEC} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$; $S_{\triangle ADF} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

$S_{ABCD} = 18 - \frac{3}{2} - 3 = 13\frac{1}{2}$.

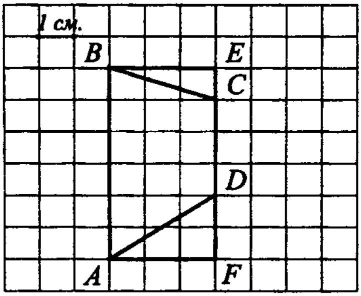


Рис. 40.

Ответ: 13,5.

B7. $\frac{\ln 42}{\ln \sqrt[3]{42}} = \frac{\ln 42}{\frac{1}{3}\ln 42} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

Ответ: 3.

B8. Так как касательная параллельна прямой $y = 1$, то ее угловой коэффициент равен 0 и тогда производная равна 0. По графику определяем, что производная обращается в ноль при $x = 2$.

Ответ: 2.

B9. $V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h = \pi\sqrt{3}$, $R^2 h = \sqrt{3}$.

$V_{DABC} = \frac{1}{3} DO \cdot S_{\triangle ABC}$ (см. рис. 41).

$S_{\triangle ABC} = 3R^2\sqrt{3}$, тогда $V_{DABC} = \frac{1}{3} h \cdot 3R^2\sqrt{3} = R^2 h\sqrt{3} = 3$.

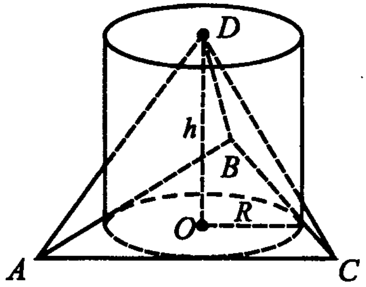


Рис. 41.

Ответ: 3.

B10. $V \geqslant \frac{19}{3}$; $\frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \geqslant \frac{19}{3}$; $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (4 + 2\sqrt{S_2} + S_2) \geqslant \frac{19}{3}$;

$\frac{1}{3}(2\sqrt{S_2} + S_2) \geqslant \frac{19}{3} - \frac{4}{3}$; $2\sqrt{S_2} + S_2 - 15 \geqslant 0$; $(\sqrt{S_2} + 5)(\sqrt{S_2} - 3) \geqslant 0$;

$\sqrt{S_2} \geqslant 3$; $S_2 \geqslant 9$.

Наименьшая площадь S_2, удовлетворяющая условию, равна 9.

Ответ: 9.

B11. $y = (x - 7)e^{x-8}$, $x \in [7; 8]$.

$y' = e^{x-8} + (x - 7)e^{x-8} = e^{x-8}(1 + x - 7) = e^{x-8}(x - 6)$.

На заданном отрезке производная положительна, значит, функция на этом отрезке возрастает и принимает наименьшее значение при наименьшем x. Тогда $y_{\text{наим.}} = y(7) = 0$.

Ответ: 0.

B12. Половину пути велосипедист проехал за $\frac{20}{40}$ (ч)$= \frac{1}{2}$ (ч), а ещё 10 км за $\frac{1}{4}$ часа, тогда мотоциклист до встречи с велосипедистом находился в пути $\frac{1}{4}$ часа и проехал 30 км. Значит, его скорость равна $30 : \frac{1}{4} = 120$ км/ч, тогда скорость сближения — $120 - 40 = 80$ км/ч.

Ответ: 80.

C1. $\begin{cases} y-\cos x=0, \\ (\sqrt{\cos x}-3)(2\sin y-\sqrt{2})=0, \end{cases}$

$\begin{cases} y-\cos x=0, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{\cos x}-3=0, \\ 2\sin y-\sqrt{2}=0; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y=\cos x, \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x=y, \\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in Z; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos x=y, \\ y=\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\pm\arccos\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, \quad n\in Z, \\ y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}\right)$, $n\in Z$.

C2. Проведём $BE\perp AD$ (см. рис. 42), тогда по теореме о трёх перпендикулярах $FE\perp AD$ и угол FEB — искомый.

Обозначим $AB=a$, тогда $FB=\frac{a}{2}$. $\angle ABE=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, $BE=\frac{a}{2}$. Получаем $\operatorname{tg}\angle FEB=1$, $\angle FEB=\frac{\pi}{4}$.

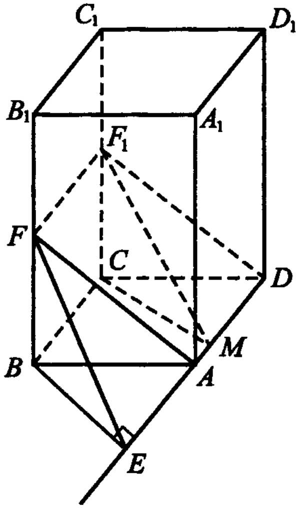


Рис. 42.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

С3. $\log_{0,5}\left(\left(2^{-x^2}-8\right)\left(2^{-x^2+2}-1\right)\right)-\log_{0,5}\dfrac{2^{-x^2+2}-1}{2^{-x^2}-8}\geqslant\log_{0,5}\left(2^{1-x^2}-2\right)^2.$

ОДЗ. $\begin{cases}\left(2^{-x^2}-8\right)\left(2^{-x^2+2}-1\right)>0,\\ 2^{1-x^2}-2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2^{-x^2+2}-1<0,\\ 2^{1-x^2}\neq 2^1;\end{cases}$

$\begin{cases}-x^2+2<0,\\ x^2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|>\sqrt{2},\\ x\neq 0;\end{cases}$ $|x|>\sqrt{2}.$

$$\log_{0,5}\frac{\left(2^{-x^2}-8\right)\left(2^{-x^2+2}-1\right)\left(2^{-x^2}-8\right)}{\left(2^{-x^2+2}-1\right)}\geqslant\log_{0,5}\left(2\cdot 2^{-x^2}-2\right)^2,$$

$\log_{0,5}\left(2^{-x^2}-8\right)^2\geqslant\log_{0,5}\left(2\cdot 2^{-x^2}-2\right)^2,$
$|2^{-x^2}-8|\leqslant|2\cdot 2^{-x^2}-2|,$
$8-2^{-x^2}\leqslant 2-2\cdot 2^{-x^2},$
$2^{-x^2}\leqslant -6.$

Последнее неравенство, а значит, и исходное, решений не имеет.

Ответ: решений нет.

С4. Возможны два случая.
1) Точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 43).

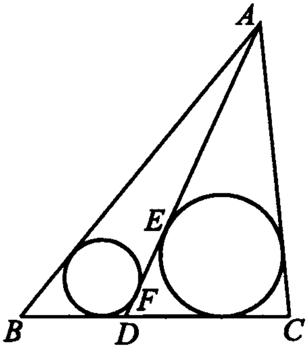


Рис. 43.

$BC=5$, $BD:DC=2:3$, значит, $BD=2$, $DC=3$.

Пусть $AE=x$, $DF=y$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, то $x=AD-ED=AD-\left(3-(7-x)\right)=AD+4-x$,

$x=\dfrac{AD}{2}+2.$

Аналогично $y=\dfrac{AD}{2}-3$, и тогда $EF=AD-x-y=1.$

2) Точка D лежит на прямой BC, вне отрезка BC (см. рис. 44).

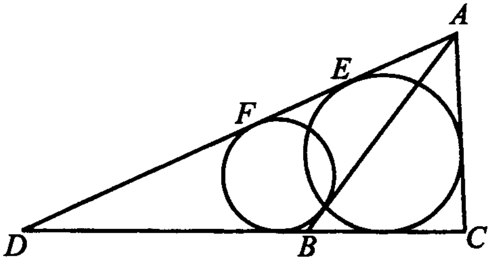


Рис. 44.

Аналогично предыдущему случаю получаем $BD = 10$, $AE = \frac{AD}{2} - 4$, $FD = \frac{AD}{2} + 1$, и тогда $EF = AD - AE - FD = 3$.

Ответ: 1; 3.

С5. $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 3x$.

1. $x \geqslant a^2$, $f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 3x = x^2 - 5x + 2a^2$.
$f'(x) = 2x - 5$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{5}{2}$.

2. $x < a^2$, $f(x) = x^2 + 2(x - a^2) - 3x = x^2 - x - 2a^2$.
$f'(x) = 2x + 1$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

При $x \geqslant a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{5}{2}$.
При $x < a^2$ графиком является часть параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = \frac{1}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$. Функция $y = f(x)$ при любом значении параметра a имеет хотя бы одну точку минимума (см. рис. 45):

1. При $a^2 \geqslant \frac{5}{2}$ точка минимума — $x = \frac{1}{2}$;

2. При $a^2 \leqslant \frac{1}{2}$ точка минимума — $x = \frac{5}{2}$;

3. При $\frac{1}{2} < a^2 < \frac{5}{2}$ функция имеет две точки минимума — $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$.

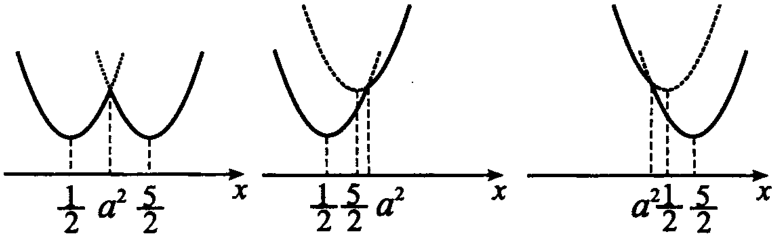


Рис. 45.

Ответ: $a \in (-\infty; +\infty)$.

С6. После указанных действий получим алгебраическую сумму всех чисел первого набора с выбранными знаками, умноженную на 10 (количество чисел второй группы), и сумму всех чисел второго набора со знаками, противоположными выбранным, умноженную на 6 (количество чисел первой группы).

Алгебраическая сумма максимальна, если все слагаемые положительны. Поставив перед каждым из чисел первой группы знак плюс, а второй — знак минус, получим:

$10 \cdot (2+3+4+5+6+7) + 6 \cdot (8+9+10+11+12+13+14+15+16+17) =$
$= 750 + 270 = 1020.$

Наименьшая возможная по модулю сумма равна 0 и достигается при следующей расстановке знаков:

$10 \cdot (2-3+4-5+6-7) - 6 \cdot (8-9+10-11+12-13+14-15+16-17) = 0.$

Ответ: 0; 1020.

Решение варианта №9

В1. Новая цена составляет $\frac{5852}{6650} \cdot 100\% = 88\%$ от старой, значит, цена была снижена на 12%.

Ответ: 12.

В2. По графику определяем, что наименьшая температура 15 января составила $-16°$.

Ответ: -16.

В3. $\log_3(x+4) = \log_3(5x+2)$; $x + 4 = 5x + 2$; $2 = 4x$; $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

B4. $BH = BC \sin \angle C$ (см. рис. 46).

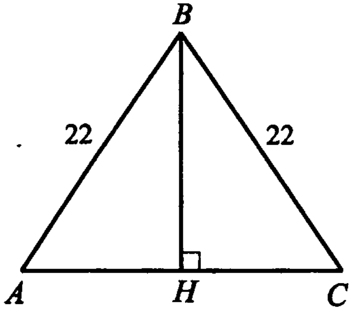


Рис. 46.

$$BH = BC\sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = BC\sqrt{1 - \frac{96}{121}} = BC\sqrt{\frac{25}{121}} =$$

$$= BC \cdot \frac{5}{11} = 10.$$

Ответ: 10.

B5. Найдём цену каждого из возможных заказов и выберем самый дешёвый:

А: $315 \cdot (35 \cdot 0{,}24) + 20 \cdot 35 = 2\,646 + 700 = 3\,346$;

Б: $330 \cdot (35 \cdot 0{,}24) + 17 \cdot 35 = 2\,772 + 595 = 3\,367$;

В: $400 \cdot (35 \cdot 0{,}24) = 3\,360$.

Самый дешёвый заказ составляет 3 346 рублей.

Ответ: 3 346.

B6. $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ (см. рис. 47).

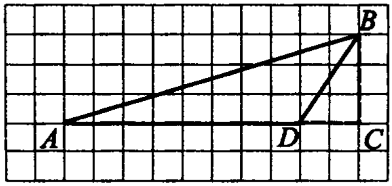


Рис. 47.

Ответ: 12.

B7. $\log_4 5 \cdot \log_5 64 = \frac{1}{\log_5 4} \cdot \log_5 4^3 = \frac{3 \log_5 4}{\log_5 4} = 3.$

Ответ: 3.

B8. Так как прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к функции $y(x)$, то их угловые коэффициенты совпадают. Иными словами, $y'(x) = 3$, где $y(x) = x^2 + 5x - 7$. Тогда $2x + 5 = 3$; $2x = -2$; $x = -1$.

Ответ: -1.

B9. Так как основание прямоугольного параллелепипеда описано около основания цилиндра, то основанием параллелепипеда является квадрат.

$S_{\text{пар.}} = h \cdot S_{\text{осн.}} = 16S_{\text{осн.}}$, тогда площадь основания параллелепипеда равна $\dfrac{64}{16} = 4$. Сторона основания параллелепипеда равна $\sqrt{4} = 2$ и равна диаметру окружности, вписанной в неё, откуда получаем радиус основания цилиндра $r = 1$.

Ответ: 1.

B10. $h(t) \geqslant 28$; $-5t^2 + 39t \geqslant 28$; $5t^2 - 39t + 28 \leqslant 0$; $D = 961$, $x_{1,2} = \dfrac{39 \pm 31}{10}$; $x_1 = 0{,}8$, $x_2 = 7$.

На высоте, большей 28 метров, камень находился $7 - 0{,}8 = 6{,}2$ секунд.

Ответ: 6,2.

B11. $y = (x - 12)e^{x-11}$; $y' = e^{x-11} + (x - 12)e^{x-11} = e^{x-11}(x - 11)$; $y' = 0$, $x = 11$ — точка экстремума исходной функции. Находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка и выбираем наименьшее.

$y(10) = -2e^{-1}$, $y(11) = -1$, $y(12) = 0$.

Ответ: -1.

B12. Пусть v — искомая скорость, а S — путь. Тогда первый мотоциклист проехал весь путь за время $\dfrac{S}{v}$, а второй — за время $\dfrac{S}{2(v-20)} + \dfrac{S}{2 \cdot 126}$. Так как мотоциклисты прибыли в пункт B одновременно, то получим уравнение $\dfrac{S}{2(v-20)} + \dfrac{S}{2 \cdot 126} = \dfrac{S}{v}$.

Умножив на $2 \cdot 126v(v - 20)$ и разделив на S, получим: $126v + v(v-20) = 2 \cdot 126(v-20)$; $v^2 - 146v + 5040 = 0$; $v_1 = 56$, $v_2 = 90$. При этом $v = 56$ не удовлетворяет условию $v \geqslant 60$, значит, $v = 90$.

Ответ: 90.

C1. $(3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3) \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0, \\ 9 - 4x^2 \geqslant 0; \end{cases} \\ 9 - 4x^2 = 0. \end{array}\right.$$

1. $9 - 4x^2 \geqslant 0$; $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

$t = 3^x, \; t > 0.$

$9t^2 - 28t + 3 = 0$. Корни уравнения: $t_1 = \frac{1}{9}, t_2 = 3.$

$3^x = \frac{1}{9}, x = -2$ — не удовлетворяет условию $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$;
$3^x = 3, x = 1.$

2. $9 - 4x^2 = 0$; $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\pm\frac{3}{2}$; 1.

С2. Найдём $\cos\alpha$, где α — угол между $\overrightarrow{PO}$ и $\overrightarrow{CA_1}$. Пусть сторона куба равна a, $a > 0$. Для удобства вычислений примем $a = 10$, так как величина искомого угла не зависит от длины ребра куба.

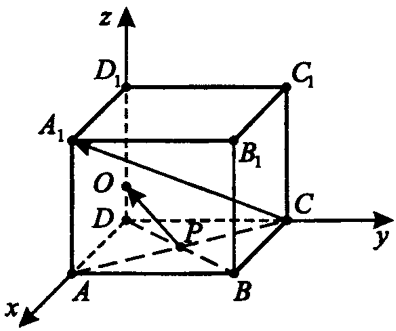


Рис. 48.

Пусть D — центр системы координат (см. рис. 48). Тогда $O(0;0;2)$, $P(5;5;0)$, $\overrightarrow{PO}(-5;-5;2)$, $A_1(10;0;10)$, $C(0;10;0)$, $CA_1(10;-10;10)$,
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{PO}|} = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

С3. Решим неравенство методом интервалов. ОДЗ: $x > 8$.
Рассмотрим уравнение на промежутке $x > 8$:
$\log_5^2(x-8) - 6\log_5\sqrt{x-8} - 4 + 25(x-8)\cdot(\log_5(x-8) - 4) = 0.$
Замена $x - 8 = 5^t$ приводит к уравнению
$t^2 - 3t - 4 + 25 \cdot 5^t \cdot (t-4) = 0,$
$(t+1)(t-4) + 25 \cdot 5^t \cdot (t-4) = 0,$

$(t-4)(t+1+25\cdot 5^t)=0,$

$$\left[\begin{array}{l} t=4, \\ 25\cdot 5^t=-t-1. \end{array}\right.$$

Уравнение $5^t = -\dfrac{t+1}{25}$ имеет единственное решение. (Слева возрастающая функция, а справа убывающая, $\Rightarrow$ не более одного решения.) Корень находим подбором: $t=-2$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x-8=5^4, \\ x-8=5^{-2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=633, \\ x=8\dfrac{1}{25}. \end{array}\right.$

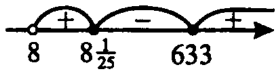


Рис. 49.

Ответ: $\left(8; 8\dfrac{1}{25}\right] \cup [633; +\infty)$.

С4. Из условия следует, что K, L, M, N — середины соответствующих сторон трапеции. Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм, и его площадь равна половине площади трапеции. Возможны два случая:
1) $\angle ABD$ — острый и 2) $\angle ABD$ — тупой. На рис. 50 изображён случай 2).

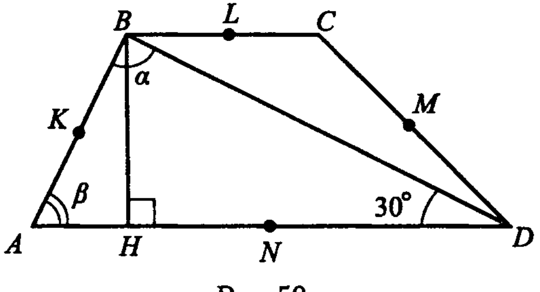


Рис. 50.

Обозначим $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle BAD$.
По теореме синусов для $\triangle ABD$ имеем:

$$AD = \frac{AB\cdot\sin\alpha}{\sin 30^\circ} = \frac{6\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{2}} = 8.$$

$BH = \frac{1}{2}BD$ как катет, лежащий против угла в $30°$ в прямоугольном $\triangle BHD$.

$\sin\beta = \sin\left(\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{6}$.

Так как возможны два случая, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.

Тогда $\sin\beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}}{6}$.

Из $\triangle ABH$: $\sin\beta = \frac{BH}{AB}$; $BH = AB \cdot \sin\beta = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$.

Итак, $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH =$

$= \frac{1}{4}(8 + 6) \cdot (2\sqrt{3} \pm \sqrt{5}) = \frac{7}{2}(2\sqrt{3} \pm \sqrt{5})$.

Ответ: $\frac{7}{2}(2\sqrt{3} \pm \sqrt{5})$.

С5. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 8x(2 - x)^3 = 3a^2, \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x + a^2 - 3a + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Так как $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(\frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) =$

$= 2(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$, то второе уравнение совокупности примет вид: $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - 2$.

Так как неравенство $-1 \leqslant -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}a - 2 \leqslant 1$ выполняется при $a \in [1; 2]$, то это уравнение имеет решения только при $a \in [1; 2]$. Но среди этих решений обязательно будут и отрицательные. Поэтому эти значения a не входят в ответ.

Рассмотрим $f(x) = 8x(2 - x)^3$. При $x < 0$, $f(x) < 0$; при $x > 2$, $f(x) < 0$. Но $3a^2 \geqslant 0$ для любого значения a. Значит, на множестве $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ уравнение $8x(2 - x)^3 = 3a^2$ не имеет решений.

Найдём наибольшее значение $f(x)$ при $x \in [0; 2]$.

$f'(x) = 16(2 - x)^2(1 - 2x)$. Уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{1}{2}$,

$x_2 = 2$. Так как $f(0) = f(2) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}$, то наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{27}{2}$. Значит, уравнение $f(x) = 3a^2$ имеет решения (причём принадлежащие промежутку $[0; 2]$, то есть неотрицательные), когда $3a^2 \leqslant \frac{27}{2}$; $a \in \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$.

С6. Пусть n — искомое натуральное число.

Тогда $n = 4x_1^5 = 5y_1^4$, где $x_i, y_i \in N$.

Значит, $x_1^5 \vdots 5 \Rightarrow x_1 \vdots 5$, то есть $x_1 = 5x_2$, $x_2 \in N$.

Кроме того, $y_1^4 \vdots 4 \Rightarrow y_1 \vdots 2 \Rightarrow y_1 = 2y_2$, $y_2 \in N$.

Тогда из равенства $4x_1^5 = 5y_1^4$ получаем равенство $4 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 5 \cdot 2^4 \cdot y_2^4$; $5^4x_2^5 = 2^2y_2^4$.

Отсюда следует, что $x_2^5 \vdots 4 \Rightarrow x_2 \vdots 2 \Rightarrow x_2 = 2x_3$, $x_3 \in N$ и $y_2^4 \vdots 5^4 \Rightarrow y_2 \vdots 5 \Rightarrow y_2 = 5y_3$, $y_3 \in N$.

Тогда получим равенство $5^4 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 2^2 \cdot 5^4 \cdot y_3^4$; $2^3x_3^5 = y_3^4$. Отсюда $y_3^4 \vdots 2^3 \Rightarrow y_3 \vdots 2 \Rightarrow y_3 = 2y_4$, $y_4 \in N$.

Получим равенство $2^3 \cdot x_3^5 = 2^4 \cdot y_4^4$; $x_3^5 = 2y_4^4$. Следовательно, $x_3^5 \vdots 2 \Rightarrow x_3 \vdots 2 \Rightarrow x_3 = 2x_4$, $x_4 \in N$.

Получим равенство $2^5x_4^5 = 2y_4^4$; $2^4x_4^5 = y_4^4 \Rightarrow y_4^4 \vdots 2^4 \Rightarrow y_4 \vdots 2 \Rightarrow y_4 = 2y_5$, $y_5 \in N$.

Получим равенство $2^4x_4^5 = 2^4y_5^4$; $x_4^5 = y_5^4$. Наименьшее натуральные значения, удовлетворяющие последнему равенству: $x_4 = 1$, $y_5 = 1$. Итак, $n = 4x_1^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot x_4 = 4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 5^5 \cdot 2^{12} = 12\,800\,000$.

Ответ: 12 800 000.

Решение варианта №10

В1. Цитрусовых фруктов в магазине $1000 \cdot (1 - 0{,}76) = 240$, из них $240 \cdot (1 - 0{,}65) = 84$ апельсинов.

Ответ: 84.

B2. По графику определяем, что на выходных наибольшая температура была 8°, а наименьшая — 3°. Значит, разность наибольшей и наименьшей температур равна 5°.

Ответ: 5.

B3. $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x) = -2$; $-\frac{1}{2}\log_2(1-3x) = -2$; $\log_2(1-3x) = 4$; $1-3x = 16$; $3x = -15$; $x = -5$.

Ответ: −5.

B4. $\cos\angle A = \dfrac{AH}{AD}$ (см. рис. 51).

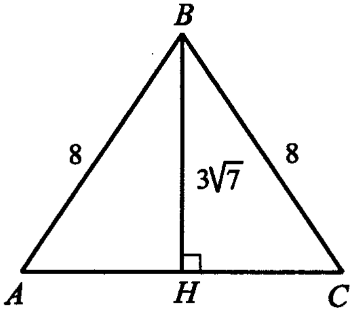


Рис. 51.

По теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{64-63} = 1$, откуда $\cos\angle A = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$.

Ответ: 0,125.

B5. Найдём цену каждого из возможных заказов и выберем самый дешёвый:

А: $250\cdot(46\cdot 0{,}15) + 46\cdot 25 = 1725 + 1150 = 2875$;
Б: $270\cdot(46\cdot 0{,}15) + 46\cdot 22 = 1863 + 1012 = 2875$;
В: $300\cdot(46\cdot 0{,}15) + 46\cdot 15 = 2070 + 690 = 2760$.
Самый дешёвый заказ составляет 2760 рублей.

Ответ: 2760.

B6. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BH = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$ (см. рис. 52).

Ответ: 4.

B7. $\log_{625} 7\cdot\log_7 5 = \dfrac{1}{\log_7 625}\cdot\log_7 5 = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 5^4} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

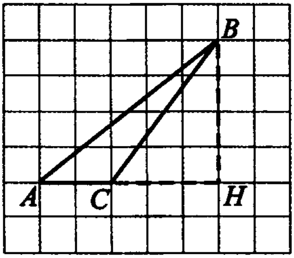


Рис. 52.

B8. Пусть x_0 — абсцисса точки касания, тогда выполняется система
$\begin{cases} y'(x_0) = -1, \\ y(x_0) = -x_0 - 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_0^2 - 7x_0 + 1 = -1, \\ x_0^3 - 3{,}5x_0^2 + x_0 - 1 = -x_0 - 3. \end{cases}$

Из первого уравнения получаем $x_{01} = \frac{1}{3}$, $x_{02} = 2$. Второму уравнению удовлетворяет только $x_0 = 2$.

Ответ: 2.

B9. Объём исходного многогранника равен сумме объемов двух параллелепипедов со сторонами 3, 4, 6 и 5 , 5, 6 (см. рис. 53).

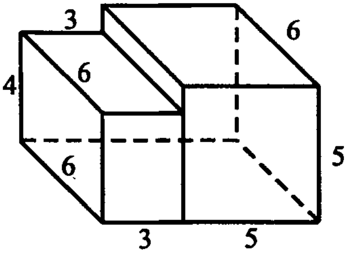


Рис. 53.

$V = 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \cdot 6 = 222.$

Ответ: 222.

B10. $\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geqslant 37{,}5\%$; $\frac{(T_1 - T_2) \cdot 100 - 37{,}5T_1}{T_1} \geqslant 0$;

$\frac{62{,}5T_1 - 27000}{T_1} \geqslant 0$; $\frac{T_1 - 432}{T_1} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} T_1 \geqslant 432, \\ T_1 \leqslant 0. \end{array}\right.$

По смыслу задачи $T_1 > T_2$, значит, наименьшее его значение равно 432.

Ответ: 432.

B11. $y = 2(x-7)e^{x-6}$; $y' = 2e^{x-6} + 2(x-7)e^{x-6} = 2(x-6)e^{x-6}$.
$y' = 0$ при $x = 6$, $x = 6$ — точка экстремума исходной функции. Находим

значения функции в точке экстремума и на концах отрезка и выбираем наименьшее.

$y(5) = -4e^{-1}, y(6) = -2, y(7) = 0.$

Ответ: -2.

B12. Пусть v — скорость первого мотоциклиста, а S — путь. Тогда первый прошел весь путь за время $\frac{S}{v}$, а второй — за время $\frac{S}{2(v+15)} + \frac{S}{2 \cdot 50}$.

Так как мотоциклисты прибыли в пункт B одновременно, то
$\frac{S}{2(v+15)} + \frac{S}{2 \cdot 50} = \frac{S}{v}$.

Умножив на $2 \cdot 50v(v+15)$ и разделив на S, получим

$50v + v(v+15) = 2 \cdot 50(v+15);\ v^2 - 35v - 1500 = 0;\ v_{1,2} = \frac{35 \pm 85}{2};$
$v_1 = -25, v_2 = 60.$

По смыслу задачи $v > 0$, значит, $v = 60$.

Ответ: 60.

C1. $(2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2) \cdot \sqrt{16 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x+3} - 17 \cdot 2^x + 2 = 0, \\ 16 - 4x^2 \geqslant 0; \end{cases} \\ 16 - 4x^2 = 0. \end{array}\right.$$

1) $t = 2^x, t > 0.\ 8 \cdot t^2 - 17t + 2 = 0$, корни уравнения: $t_1 = \frac{1}{8}, t_2 = 2.$

$2^x = \frac{1}{8}, x = -3$ — не удовлетворяет условию $16 - 4x^2 \geqslant 0$.
$2^x = 2, \underline{x = 1}$.

2) $16 - 4x^2 = 0;\ x_{1,2} = \pm 2.$

Ответ: ± 2; 1.

C2. Введём систему координат, как показано на рис. 54.

Из условия получим:
$K(10; 0; 4), M(0; 7; 10), \overrightarrow{KM}(-10; 7; 6);$
$B(10; 10; 0), D_1(0; 0; 10), \overrightarrow{BD_1}(-10; -10; 10).$

Пусть α — искомый угол. Тогда $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{BD_1}|} =$

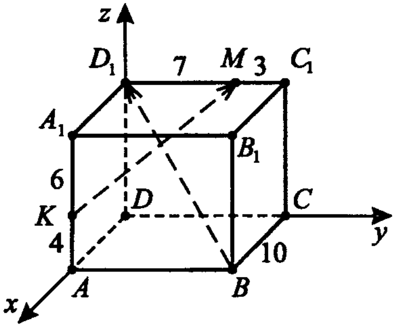


Рис. 54.

$$= \frac{(-10)\cdot(-10) + 7\cdot(-10) + 6\cdot 10}{\sqrt{10^2+7^2+6^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+10^2}} = \frac{9}{\sqrt{555}}.$$

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{555}}$.

С3. ОДЗ: $x > 2$.

Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_3^2(x-2) + 3(x-2)(2\log_3\sqrt{x-2}+3) - 7\log_3(x-2) - 30 = 0$ на промежутке $x > 2$.

Замена $x - 2 = 3^t$ приводит к уравнению
$t^2 - 7t - 30 + 3\cdot 3^t(t+3) = 0$,
$(t+3)(t-10) + 3\cdot 3^t(t+3) = 0$,
$(t+3)(t - 10 + 3\cdot 3^t) = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t = -3, \\ 3\cdot 3^t = 10 - t. \end{array}\right.$$

Уравнение $3\cdot 3^t = 10 - t$ имеет корень $t = 1$. Других корней нет, так как слева от знака равенства возрастающая функция, а справа — убывающая.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 3^{-3}, \\ x - 2 = 3^1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\frac{1}{27}, \\ x = 5. \end{array}\right.$

Рис. 55.

Ответ: $\left(2; 2\frac{1}{27}\right] \cup [5; +\infty)$.

С4. Возможны 2 случая: 1) центр описанной окружности находится внутри трапеции (см. рис. 56); 2) центр описанной окружности — вне трапеции (см. рис. 57).

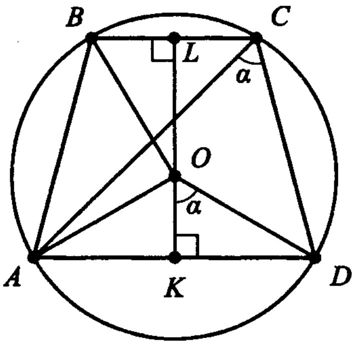


Рис. 56.

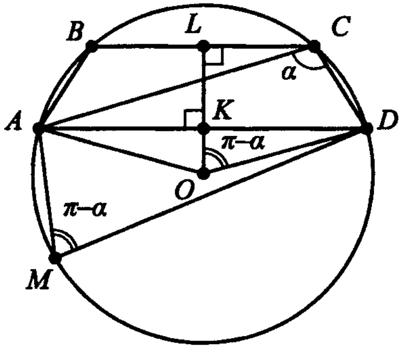


Рис. 57.

1) $h = OL + OK = 4 + 3 = 7$ — высота трапеции.
$\angle AOD = 2\angle ACD$ как центральный и вписанный угол, опирающиеся на одну дугу.

$\triangle AOD$ — равнобедренный, OK — высота. Значит, $\angle KOD =$
$= \frac{1}{2}\angle AOD = \angle ACD.$

$\triangle OKD$ — прямоугольный, $\Rightarrow AD = 2KD = 2OK \cdot \operatorname{tg}\alpha =$

$$= 2OK \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 8.$$

В прямоугольном $\triangle BOL$ $OL = 4$, $BO = OD = \sqrt{KD^2 - OK^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = 5$. Значит, $BL = \sqrt{OB^2 - OL^2} = 3$, $BC = 2BL = 6$ (OL — высота и медиана равнобедренного $\triangle BOC$).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2}(8 + 6) \cdot 7 = 49.$$

Площадь искомого четырёхугольника $S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{49}{2} = 24{,}5$.

2) Высота трапеции $h = OL - OK = 4 - 3 = 1$.

$\angle AMD = \pi - \alpha$, так как $\breve{ABD} + \breve{AMD} = 2\pi$.

$\angle KOD = \frac{1}{2}\angle AOD = \angle AMD = \pi - \alpha$.

Из $\triangle OKD$ получим $OD = \dfrac{OK}{\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{OK}{-\cos\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 5$ ($\cos\alpha < 0$, так как α — тупой угол).

$AD = 2 \cdot KD = 2 \cdot \sqrt{OD^2 - OK^2} = 8$.

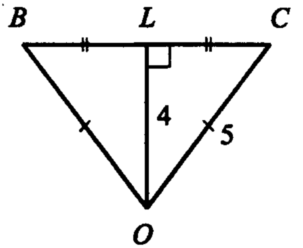


Рис. 58.

Из $\triangle BOC$ (см. рис. 58) $BC = 2LC = 2\sqrt{OC^2 - OL^2} = 6$.

Площадь искомого четырёхугольника

$$S = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(AD + BC)}{2} \cdot h = 3{,}5.$$

Ответ: 3,5; 24,5.

С5. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 x - 5\sin x - 2a(\sin x - 3) + 6 = 0, \\ 2x - 2x^2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \sqrt{2}a + 8x\sqrt{2x - 2x^2} = 0. \end{array}\right.$$

Замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$ приводит первое уравнение совокупности к виду

$t^2-(5+2a)t+6(a+1)=0,$

$D=(5+2a)^2-4\cdot 6\cdot(a+1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\geqslant 0.$

$$t_{1,2}=\frac{5+2a\pm|2a-1|}{2}=\frac{5+2a\pm(2a-1)}{2}.$$

$$t_1=\frac{5+2a+2a-1}{2}=2a+2.$$

$t_2=\dfrac{5+2a-2a+1}{2}=3$ — не удовлетворяет условию $t\in[-1;1]$.

Это уравнение может иметь решения, если выполняется условие $-1\leqslant 2a+2\leqslant 1$; $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$. Но при $a\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ уравнение $\sin x=2a+2$ имеет бесконечную последовательность решений, среди которых есть и отрицательные. Поэтому эти значения a необходимо исключить из ответа.

Рассмотрим уравнение $-8x\sqrt{x-x^2}=a$ и функцию $f(x)=-8x\sqrt{x-x^2}$. Область определения: $x-x^2\geqslant 0$; $x\in[0;1]$. Найдём наименьшее значение $f(x)$. $f'(x)=\dfrac{4x(4x-3)}{\sqrt{x\cdot(1-x)}}$; $f'(x)=0$ при $x=\dfrac{3}{4}$; $x=0$ и $x=1$ — критические точки.

$f(0)=f(1)=0$; $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ — наименьшее значение. Так как $f(x)\leqslant 0$ на своей области определения и наименьшее значение равно $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, то уравнение $f(x)=a$ имеет решение, только если $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 0$, причём все эти решения неотрицательны.

Ответ: $\left[-\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};0\right]$.

С6. Пусть n — искомое натуральное число.

Тогда $n=2x_1^5=5y_1^2$, $x_1,y_1\in N$. Отсюда

$x_1^5 \vdots 5\Rightarrow x_1 \vdots 5$, $x_1=5x_2$, $x_2\in N$;

$y_1^2 \vdots 2\Rightarrow y_1 \vdots 2$, $y_1=2y_2$, $y_2\in N$.

Из равенства $2x_1^5=5y_1^2$ получим равенство $2\cdot 5^5\cdot x_2^5=5\cdot 2^2\cdot y_2^2$; $5^4x_2^5=2y_2^2$. Отсюда

$x_2^5 \vdots 2\Rightarrow x_2 \vdots 2\Rightarrow x_2=2x_3, x_3\in N,$

$y_2^2 \vdots 5^4\Rightarrow y_2 \vdots 5^2\Rightarrow y_2=5^2y_3$, $y_3\in N$.

Получим $5^4 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 2 \cdot 5^4 \cdot y_3^2$; $2^4 x_3^5 = y_3^2$.

Отсюда $y_3^2 \vdots 2^4 \Rightarrow y_3 \vdots 2^2 \Rightarrow y_4 = 2^2 y_3$, $y_4 \in N$.

Получим $2^4 x_3^5 = 2^4 y_4^2$; $x_3^5 = y_4^2$.

Наименьшие натуральные значения, удовлетворяющие последнему равенству: $x_3 = 1$, $y_1 = 1$.

Итак, $n = 2 \cdot x_1^5 = 2 \cdot 5^5 \cdot x_2^5 = 2 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot x_3^5 = 5^5 \cdot 2^6 = 200\,000$.

Ответ: 200 000.

Решение варианта №11

B1. $11 \cdot \dfrac{10000}{100} = 1100$ литров бензина расходует такси за месяц. Тогда ежемесячные затраты равны: $1100 \cdot 21{,}2 = 23\,320$ рублей.

Ответ: 23 320.

B2. По диаграмме определяем самую большую температуру (июль, $25°$) и самую низкую (январь, $-15°$) и находим их разность: $25° - (-15°) = 40°$.

Ответ: 40.

B3. $\log_{17}(5x + 7) = \log_{17} 22$; $5x + 7 = 22$; $x = 3$.

Ответ: 3.

B4. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13 - 3^2} = 2$ (см. рис. 59). Тогда $\operatorname{ctg} A = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$.

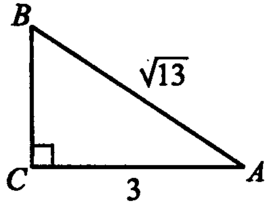


Рис. 59.

Ответ: 1,5.

B5. Подсчитаем стоимость каждого способа и выберем самый дешёвый.

А: $5 \cdot 70 \cdot 17 = 5\,950$.

Б: $4 \cdot 100 \cdot 17 = 6\,800$.

В: $3 \cdot 120 \cdot 17 = 6\,120$.

Ответ: 5 950.

B6. $ABCD$ — прямоугольная трапеция (см. рис. 60).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2}(3+5) \cdot 8 = 32.$$

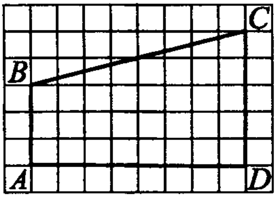


Рис. 60.

Ответ: 32.

B7. $102 \log_5 \sqrt[6]{5} = 102 \cdot \frac{1}{6} \log_5 5 = \frac{102}{6} = 17.$

Ответ: 17.

B8. Производная функции положительна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку возрастания, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует (например, точка с абсциссой 7). По рисунку определяем абсциссы таких точек: -7, -4, -3, -2, -1, 0, 4, 5, 6. Таких точек 9.

Ответ: 9.

B9. Объём части конуса составляет $\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{12}$ от объёма конуса.

$V_{\text{конуса}} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 36}{3} = 120\pi$. $V = \frac{1}{12}V_{\text{конуса}} = 10\pi$. Тогда $\frac{V}{\pi} = 10$.

Ответ: 10.

B10. Для нахождения требуемого времени необходимо решить неравенство $T(t) \leqslant 338$. Подставляя все известные значения, получим неравенство: $296 + 5t - \frac{1}{8}t^2 \leqslant 338$; $t^2 - 40t + 336 \geqslant 0$; $t \in (-\infty;\ 12) \cup (28; +\infty)$.

Таким образом, через 12 минут после начала работы прибор нужно отключать.

Ответ: 12.

B11. $y' = -6\sin x + 3\sqrt{3}$; $y' = 0$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $x = \frac{\pi}{3}$. Из чисел $y(0) = 14 - \pi\sqrt{3}$,

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ наибольшим является 11.

Ответ: 11.

B12. Пусть v — скорость велосипедиста на пути из A в B, t — время, за которое он проехал этот путь. По условию задачи составим систему уравнений:

$\begin{cases} (v+3)(t-3) = 108, \\ vt = 108; \end{cases} \Rightarrow vt + 3t - 3v - 9 = vt;\ t = v + 3.$ Подставляя последнее выражение для t во второе уравнение, получим: $v(v+3) = 108$; $v^2 + 3v - 108 = 0$; $v_1 = -12$, $v_2 = 9$. Так как по смыслу задачи $v > 0$, то $v = 9$.

Ответ: 9.

C1. $\begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 12 = 0, \\ \sin y = x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4^x)^2 - 8 \cdot 4^x + 12 = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$

Решим первое уравнение полученной системы. Пусть $t = 4^x$, $t > 0$. Тогда $t^2 - 8t + 12 = 0$. Отсюда находим $t_1 = 2$, $t_2 = 6$. Тогда

1) $4^{x_1} = 2$; $4^{x_1} = 4^{\frac{1}{2}}$; $x_1 = \frac{1}{2}$.

2) $4^{x_2} = 6$; $\log_4 4^{x_2} = \log_4 6$; $x_2 = \log_4 6$.

Поскольку найденные значения x_1, x_2 должны удовлетворять второму уравнению системы, то должно выполняться $|x_1| \leqslant 1$; $|x_2| \leqslant 1$. Но $x_2 = \log_4 6 > 1$, следовательно, не является решением заданной системы уравнений.

Подставляя значение $x_1 = \frac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получаем

$\sin x = \frac{1}{2}$. Отсюда $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

C2. 1. Пусть AK — высота треугольника ABC, проведённая из вершины A к стороне BC (см. рис. 61). Так как по условию $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC = 10$) и A, B, C лежат на поверхности шара, то проекцией точки O на плоскость ABC является точка O_1 — центр описанной окружности треугольника ABC и $O_1 \in AK$. Следовательно, угол между прямой AO и плоскостью треугольника равен $\angle OAK$.

2. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 62). Пусть прямая l является серединным перпендикуляром к стороне AC и $L = l \cap AC$. Тогда $AL = LC$, $O_1 \in l$, $\triangle ALO_1$ — прямоугольный.

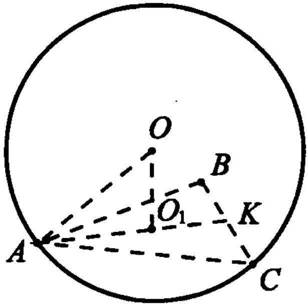


Рис. 61.

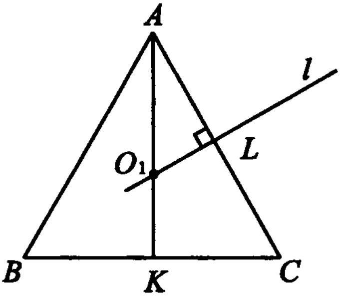


Рис. 62.

$\Delta AO_1L \sim \Delta KAC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ALO_1 = \angle AKC = 90°$).

$\dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AC}{AO_1} \Rightarrow$

$$AO_1 = \frac{AC \cdot AL}{AK} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2}AC}{\sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10}{\sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2}} = \frac{25}{4}.$$

3. Из ΔAOO_1 находим $\cos\angle O_1AO = \dfrac{AO_1}{AO} = \dfrac{25}{4 \cdot 12{,}5} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle OAK = \angle O_1AO = 60°$.

Ответ: $60°$.

С3. $7^{18} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{5\sqrt{x}} > 1.$

ОДЗ: $x \geqslant 0$.

Преобразуем исходное неравенство к виду $7^{18} \cdot 7^{-2x} \cdot 7^{-5\sqrt{x}} > 7^0$; $7^{18-2x-5\sqrt{x}} > 7^0$; $18 - 2x - 5\sqrt{x} > 0$.

Пусть $t = \sqrt{x}$, $t \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2t^2+5t-18<0, \\ t\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{2}<t<2, \\ t\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant t<2.$$

Возвращаясь к неизвестному x, получаем $0\leqslant \sqrt{x}<2$.

Отсюда $0\leqslant x<4$.

Ответ: $[0;4)$.

C4. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $BC<AD$ (см. рис. 63). Согласно условию, одна из диагоналей делится точкой их пересечения в отношении $1:2$. Не нарушая общности, будем считать, что $OC:AO=1:2$.

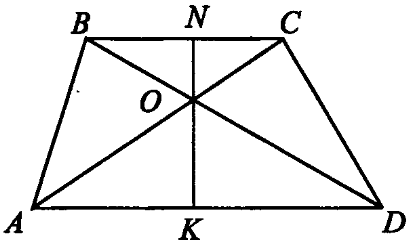


Рис. 63.

$\triangle BOC\sim\triangle AOD$ ($\angle BOC=\angle AOD$ — вертикальные, $\angle BCO=\angle OAD$ — накрест лежащие, $CO:AO=1:2$). Следовательно, $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$, $AD=2BC$.

Пусть ON — высота $\triangle BOC$, OK — высота $\triangle AOD$. Тогда $\dfrac{ON}{OK}=\dfrac{1}{2}$, $OK=2ON$.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot NK=\frac{1}{2}(BC+2BC)\cdot(NO+OK)=$$

$$=\frac{3}{2}BC\cdot(NO+2NO)=\frac{9BC}{2}\cdot NO=9S_{BOC}.$$

Согласно условию, $S_{BOC}=8$, следовательно, $S_{ABCD}=9\cdot 8=72$.

2. Пусть $BC>AD$ (см. рис. 64).

Будем считать $OD:OB=1:2$. Проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным в пункте 1, получаем $\triangle AOD\sim\triangle COD$; $CB=2AD$; $ON=2KO$; следовательно,

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+CB)\cdot NK=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CB+CB\right)\cdot(KO+ON)=$$

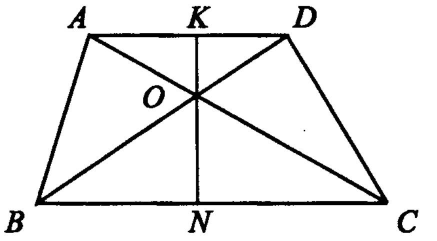


Рис. 64.

$$= \frac{3}{4}CB\left(\frac{1}{2}ON + ON\right) = \frac{9}{8}CB \cdot ON = \frac{9}{4} \cdot S_{COB} = \frac{9}{4} \cdot 8 = 18$$

Ответ: 18; 72.

С5. Согласно условию задачи, нужно найти все значения a, для которых при каждом $x \in [4; 16]$ выполняется

$$\log_2^2 x + 2a \leqslant (a+2)\log_2 x \Rightarrow \log_2^2 x - (a+2)\log_2 x + 2a \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\log_2 x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 - 8a}}{2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2} =$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{a+2 \pm (a-2)}{2};$$

$$\log_2 x_1 = \frac{a+2+a-2}{2} = a; \log_2 x_2 = \frac{a+2-a+2}{2} = 2.$$

Следовательно, $x_1 = 2^a$, $x_2 = 4$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $2^a \leqslant 4$, тогда $2^a \leqslant x \leqslant 4$. Но, согласно условию, исходное неравенство должно выполняться для всех $x \in [4; 16]$. Значит, рассматриваемый случай не удовлетворяет условию.

2. Пусть $2^a \geqslant 4$, тогда $4 \leqslant x \leqslant 2^a$. Так как по условию неравенство должно выполняться для всех $x \in [4; 16]$, то $2^a \geqslant 16$; $a \geqslant 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

С6. Требуется найти все такие пары чисел (a, b), $a, b \in N$, что $a^2 - b^2 = 33$; $(a-b)\cdot(a+b) = 33$. Следовательно, числа $x = a - b$ и $y = a + b$, где $x \leqslant y$, являются делителями числа 33.

Возможны следующие случаи:

1) $x = 1$, $y = 33$, тогда $\begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 33; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 2b = 32; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 17, \\ b = 16. \end{cases}$

2) $x = 3$, $y = 11$, тогда $\begin{cases} a - b = 3, \\ a + b = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + b, \\ 2b = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7, \\ b = 4. \end{cases}$

Ответ: (17; 16), (7; 4).

Решение варианта №12

B1. Вместе с процентами клиент должен отдать банку $1{,}14 \cdot 100\,000 = 114\,000$ рублей. Значит, ежемесячно он должен выплачивать $114\,000 : 12 = 9\,500$ рублей.

Ответ: 9 500.

B2. Проводим прямую, перпендикулярную оси температур, через точку $T = 5°C$. Из рисунка видно, что только 4 столбика диаграммы её не пересекают.

Ответ: 4.

B3. $\log_3(7x + 1) = 3\log_9 4$; $\log_3(7x + 1) = \frac{3}{2}\log_3 4$;

$\log_3(7x + 1) = \log_3 4^{\frac{3}{2}}$; $7x + 1 = 8$; $x = 1$.

Ответ: 1.

B4. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{27 + 3^2} = 6$ (см. рис. 65). Тогда $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

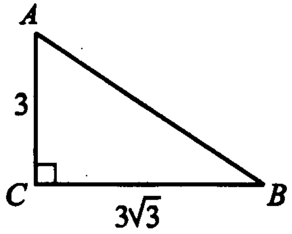


Рис. 65.

Ответ: 0,5.

B5. Подсчитаем стоимость всех перевозок и выберем самую дешёвую.

А: Так как $48 : 7 = 6\frac{6}{7}$, то потребуется 7 автомобилей. Это обойдётся в $7 \cdot 1200 \cdot 9 = 75\,600$ рублей.

Б: Так как $48 : 9 = 5\frac{1}{3}$, то потребуется 6 автомобилей. Это обойдётся в $6 \cdot 1400 \cdot 9 = 75\,600$ рублей.

В: Так как $48 : 16 = 3$, то потребуется 3 автомобиля. Это обойдётся в $3 \cdot 2700 \cdot 9 = 72\,900$ рублей. Это самая дешёвая перевозка.

Ответ: 72 900.

В6. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC (см. рис. 66).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2}(7 + 10) \cdot 5 = 42{,}5.$$

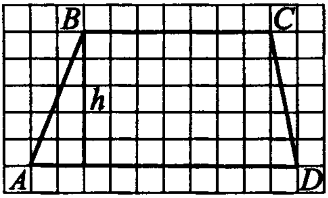


Рис. 66.

Ответ: 42,5.

В7. $108 \log_{11} \sqrt[8]{11} = \frac{108}{8} \log_{11} 11 = \frac{108}{8} = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

В8. Так как касательные параллельны прямой $y = -15$, то они параллельны оси Ox, и, следовательно, производные функции $f(x)$ в точках касания должны равняться нулю. Это стационарные точки. На рисунке все они являются точками экстремума (максимумами или минимумами). Их пять.

Ответ: 5.

В9. Так как сторона основания больше в 2 раза, то площадь основания больше в 4 раза. Так как объём воды не изменяется, то её уровень уменьшится в 4 раза: $20 : 4 = 5$.

Ответ: 5.

В10. Для решения задачи необходимо решить уравнение $H(t) = 0$; $0{,}64t^2 - 2{,}08t + 1{,}69 = 0$; $64t^2 - 208t + 169 = 0$; $(8t - 13)^2 = 0$; $t = 1{,}625$.

Ответ: 1,625.

В11. $y' = -4\sqrt{2}\sin x + 4$; $y' = 0$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $x = \frac{\pi}{4}$. Из чисел $y(0) = 4\sqrt{2} - \pi - 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$ наибольшим является 3.

Ответ: 3.

B12. Пусть v — скорость велосипедиста на пути из A в B, t — время, за которое он проехал этот путь. По условию задачи составим систему уравнений:
$\begin{cases} (v-2)(t+2)=120, \\ vt=120; \end{cases} \Rightarrow vt-2t+2v-4=vt;\ t=v-2.$ Подставляя последнее выражение для t во второе уравнение, получим: $v(v-2)=120$; $v^2-2v-120=0$; $v_1=-10, v_2=12$. Так как по смыслу задачи $v>0$, то $v=12$.

Ответ: 12.

C1. $\begin{cases} 9^{2y}-3\cdot 9^{y+1}+72=0, \\ \cos x = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^y)^2-27\cdot 9^y+72=0, \\ \cos x = y. \end{cases}$

Решим первое уравнение полученной системы. Пусть $t=9^y$, $t>0$. Тогда $t^2-27t+72=0$. Отсюда находим $t_1=3$, $t_2=24$. Тогда

1) $9^{y_1}=3;\ 9^{y_1}=9^{\frac{1}{2}};\ y_1=\frac{1}{2}$.

2) $9^{y_2}=24;\ \log_9 9^{y_2}=\log_9 24;\ y_2=\log_9 24$.

Поскольку найденные значения y_1, y_2 должны удовлетворять второму уравнению системы, то должно выполняться $|y_1|\leqslant 1$; $|y_2|\leqslant 1$. Но $y_2=\log_9 24>1$, следовательно, не является решением заданной системы уравнений.

Подставляя значение $y_1=\frac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получаем $\cos x=\frac{1}{2}$. Отсюда $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{1}{2}\right), n\in Z$.

C2. Пусть O_1 — проекция точки O на плоскость ABC (см. рис. 67). Тогда угол между прямой AO и плоскостью ABC равен $\angle OAO_1$.

Так как $AO=BO=CO=OD$ (точки A, B, C, D лежат на поверхности шара), то $AO_1=BO_1=CO_1=DO_1$. Следовательно, O_1 — центр описанной окружности около трапеции $ABCD$.

Пусть O_2 — середина стороны AD, $BK\perp AD$, $AB=BC=CD=x$ (см. рис. 68). Из $\triangle ABK$ находим $AK=AB\cos\angle BAK=x\cos 60^\circ=\frac{x}{2}$. С другой стороны, $AK=\frac{AD-BC}{2}=\frac{2AO_2-x}{2}$, значит, $\frac{2AO_2-x}{2}=\frac{x}{2}$; $AO_2=x$. Следовательно, $ABCO_2$ — ромб, $O_2C=x$; BO_2DC — ромб, $BO_2=x$. Значит, $O_1=O_2$ — центр описанной окружности.

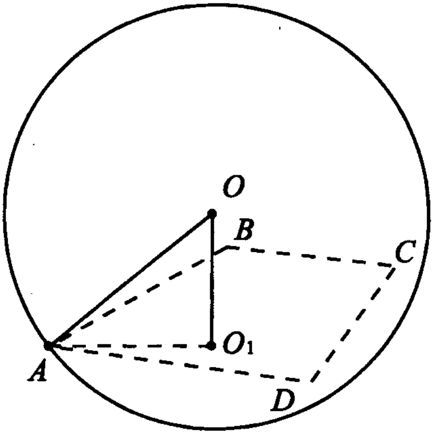


Рис. 67.

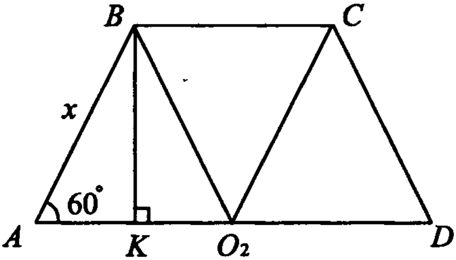


Рис. 68.

По условию $AD = AO$. Тогда $AO = 2x$. Из ΔOAO_1 (см. рис. 67) находим $\cos\angle OAO_1 = \frac{AO_1}{AO} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$; $\angle OAO_1 = 60°$.

Ответ: 60°.

С3. $5^{33}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{x}} > 1$. ОДЗ: $x \geqslant 0$.

Преобразуем исходное неравенство к виду $5^{33}\cdot 5^{-3x}\cdot 5^{-2\sqrt{x}} > 1$; $5^{33-3x-2\sqrt{x}} > 5^0$; $33-3x-2\sqrt{x} > 0$.

Пусть $t=\sqrt{x}$, $t \geqslant 0$. Тогда $\begin{cases} 33-3t^2-2t>0, \\ t\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{11}{3} < t < 3, \\ t \geqslant 0; \end{cases}$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant t < 3$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем $0 \leqslant \sqrt{x} < 3$. Отсюда $0 \leqslant x < 9$.

Ответ: $[0;9)$.

С4. 1. Опустим из точки N — середины боковой стороны CD — перпендикуляр NK к прямой, проходящей через сторону AB(см. рис. 69).

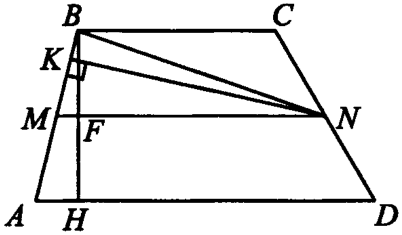


Рис. 69.

Из условия следует, что $NK = 5$.

2. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$, BH — её высота, $F = MN \cap BH$.

В треугольнике BNM сторона $BM = \frac{1}{2}AB = 3{,}5$.

$S_{BNM} = \frac{1}{2}BM \cdot NK = \frac{1}{2}MN \cdot BF$. Следовательно,

$\frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 5 = \frac{1}{2}MN \cdot BF$; $MN \cdot BF = 17{,}5$.

3. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH = MN\cdot BH = MN\cdot 2BF = 2\cdot 17{,}5 = 35$.

Ответ: 35.

С5. Согласно условию задачи, нужно найти все значения a, для которых при каждом $x \in [3; 9]$ выполняется.

$\log_3^2 x + a \leqslant (a+1)\log_3 x \Rightarrow \log_3^2 x - (a+1)\log_3 x + a \leqslant 0 \Rightarrow$

$\log_3 x_{1,2} = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a}}{2} = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{a^2-2a+1}}{2} =$

$= \dfrac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2} = \dfrac{a+1 \pm (a-1)}{2}$;

$\log_3 x_1 = \dfrac{a+1+a-1}{2} = a$; $\log_3 x_2 = \dfrac{a+1-a+1}{2} = 1$.

Следовательно, $x_1 = 3^a$, $x_2 = 3$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $3^a \leqslant 3$, тогда $3^a \leqslant x \leqslant 3$. Но, согласно условию, исходное неравенство должно выполняться для всех $x \in [3; 9]$. Значит, рассматриваемый случай не удовлетворяет условию.

2. Пусть $3^a \geqslant 3$, тогда $3 \leqslant x \leqslant 3^a$. Так как по условию неравенство должно выполняться для всех $x \in [3; 9]$, то $3^a \geqslant 9$; $a \geqslant 2$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

С6. Требуется найти все такие пары чисел (a, b), $a, b \in N$, что $a^2 - b^2 = 77$; $(a-b)\cdot(a+b) = 77$. Следовательно, числа $x = a - b$ и $y = a + b$, где $x \leqslant y$, являются делителями числа 77.

Возможны следующие случаи:

1) $x = 1$, $y = 77$, тогда $\begin{cases} a - b = 1, \\ a + b = 77; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 2b = 76; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 39, \\ b = 38. \end{cases}$

2) $x = 7$, $y = 11$, тогда $\begin{cases} a - b = 7, \\ a + b = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 + b, \\ 2b = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 2. \end{cases}$

Ответ: $(9; 2)$, $(39; 38)$.

Решение варианта №13

В1. 1 кг 700 г = 1,7 кг. Для покупки 1,7 кг апельсинов потребуется заплатить $1{,}7 \cdot 35 = 59{,}5$ рублей, тогда покупатель получит $100 - 59{,}5 = 40{,}5$ рублей сдачи.

Ответ: 40,5.

В2. Искомая температура — наименьшая ордината жирных точек с абсциссами в интервале $[17; 28]$. По графику определяем: наименьшая среднесуточная температура в указанный период равна $18°C$.

Ответ: 18.

В3. $2^{x+3} = 4^{x-1}$; $2^{x+3} = (2^2)^{x-1}$; $2^{x+3} = 2^{2x-2}$; $x + 3 = 2x - 2$; $x = 5$.

Ответ: 5.

В4. Пусть $AC = x$ (см. рис. 70), тогда $AB = \dfrac{AC}{\sin B} = 5x$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то есть $25x^2 = x^2 + 216$; $x^2 = 9$; $x = 3$.

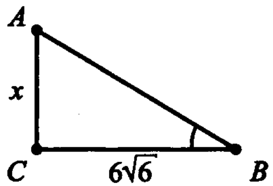


Рис. 70.

Ответ: 3.

B5. При покупке у поставщика А придётся заплатить
$2400 \cdot 70 + 16400 = 184\,400$.

Цена 70 м^2 бруса у поставщика Б равна $2\,600 \cdot 70 = 182\,000 < 190\,000$, значит, полностью за покупку с доставкой придётся заплатить
$182\,000 + 2\,300 = 184\,300$.

Аналогично для поставщика В имеем: $2\,700 \cdot 70 = 189\,000 > 170\,000$, всего нужно будет заплатить 189 000.

Итак, наименьшая стоимость покупки с доставкой равна 184 300.

Ответ: 184 300.

B6. Обозначим точки $O(0;0)$, $A(5;6)$, $B(9;4)$, $C(0;6)$, $D(9;6)$, $E(9;0)$. Тогда $S_{OAB} = S_{OCDE} - S_{OCA} - S_{ADB} - S_{OBE}$ (см. рис. 71).

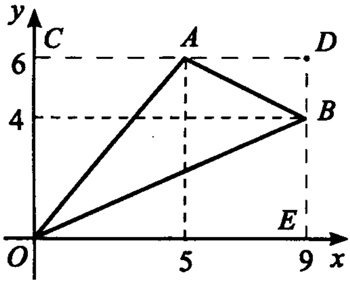


Рис. 71.

Так как $OCDE$ — прямоугольник, OCA, ADB, OBE — прямоугольные треугольники, то

$$S_{OAB} = 9 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 54 - 15 - 4 - 18 = 17.$$

Ответ: 17.

B7. $\log_{81} \log_7 343 = \log_{81} \log_7 7^3 = \log_{81} 3 = \log_{3^4} 3 = \frac{1}{4} \log_3 3 =$

$= \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

B8. На отрезке $[-7; -3]$ производная функции $f(x)$ отрицательна, значит, на этом отрезке функция $f(x)$ убывает и, следовательно, принимает наименьшее значение в точке $x = -3$.

Ответ: -3.

B9. Пусть r — радиус основания цилиндра. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе этого треугольника. Иными словами, $(2r)^2 = 8^2 + 5^2$, $r^2 = \dfrac{89}{4}$. Высота цилиндра равна h боковому ребру призмы, $h = \dfrac{4}{\pi}$. Объём цилиндра равен $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \dfrac{89}{4} \cdot \dfrac{4}{\pi} = 89$.

Ответ: 89.

B10. Зависимость выручки r от цены p задаётся формулой $r(p) = p(442 - 17p) = 17p(26 - p)$.

Найдём значения p, при которых выручка не менее 1173 рублей. $17p(26-p) \geqslant 1173$; $p(26-p) \geqslant 69$; $p^2 - 26p + 69 \leqslant 0$; $(p-3)(p-23) \leqslant 0$; $3 \leqslant p \leqslant 23$. Максимальная цена равна 23.

Ответ: 23.

B11. $y'(x) = -6\sin x - 10$, $y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, наименьшее значение $y(0) = 6\cos 0 - 10 \cdot 0 + 1 = 7$.

Ответ: 7.

B12. Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста, тогда $(x - 5)$ км/ч — скорость второго. На весь путь первый велосипедист затратил $\dfrac{84}{x}$ часов, а второй — $\dfrac{84}{x-5}$ часов, и по условию $\dfrac{84}{x} = \dfrac{84}{x-5} - 5$.

Считая, что $x \neq 0$ и $x \neq 5$, имеем $84(x - 5) = 84x - 5x(x - 5)$; $x(x - 5) = 84$; $x^2 - 5x - 84 = 0$; $(x - 12)(x + 7) = 0$.

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 12$.

Скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 7.

Ответ: 7.

C1. $(\log_3 x + \log_x 3 + 2)(\log_3 x - \log_{3x} x) = 6$.

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{3}$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{1}{\log_x 3} + \log_x 3 + 2\right)\left(\frac{1}{\log_x 3} - \frac{1}{1 + \log_x 3}\right) = 6.$$

Замена $\log_x 3 = t$, $t \neq -1$, $t \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{t} + t + 2\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) = 6.$$

$\dfrac{(t+1)^2}{t} \cdot \dfrac{1}{t(t+1)} = 6$. Так как, $t \neq 0$, то

$t+1 = 6t^2$;

$6t^2 - t - 1 = 0$;

$t_1 = \dfrac{1}{2}$, $\log_x 3 = \dfrac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}} = 3$, $x = 9$;

$t_2 = -\dfrac{1}{3}$, $\log_x 3 = -\dfrac{1}{3}$, $x^{-\frac{1}{3}} = 3$, $x = \dfrac{1}{27}$.

Ответ: 9; $\dfrac{1}{27}$.

С2. Пусть M — середина ребра SE (см. рис. 72), H — проекция точки M на плоскость основания пирамиды. Пусть O — центр основания пирамиды. Так как проекцией ребра SE на плоскость основания является отрезок OE, то $H \in OE$.

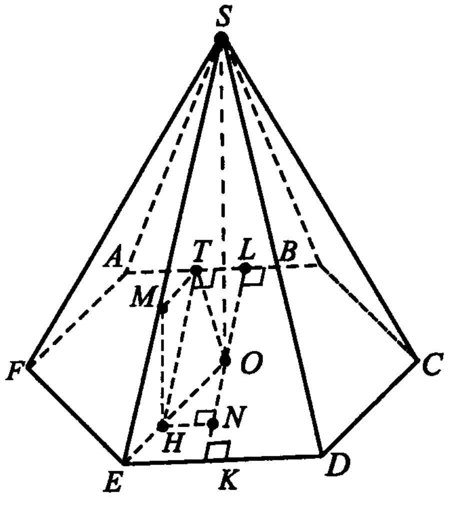


Рис. 72.

Из ΔSOE: $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. ($OE = 1$, как радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника со стороной 1).

$\Delta EMH \sim \Delta ESO$ (прямоугольные с общим острым углом E).

$\dfrac{MH}{SO} = \dfrac{EM}{SE} \implies MH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{EH}{HO} = \dfrac{EM}{MS} = 1 \implies EH = HO = \dfrac{1}{2}$.

Пусть OK — высота в $\triangle EOD$. $\triangle EOD$ — правильный со стороной 1 $\Longrightarrow$ $OK = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Аналогично $OL = \frac{\sqrt{3}}{2}$, где OL — высота в $\triangle AOB$.

$AB \parallel ED \Longrightarrow K,\ O,\ L$ лежат на одной прямой, $KL = \sqrt{3}$.
Из точки H опустим перпендикуляр HN на OK.
Так как, $HN \parallel EK$, то по теореме Фалеса

$$\frac{KN}{NO} = \frac{EH}{HO} = 1 \Longrightarrow KN = \frac{OK}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$NL = KL - KN = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Опустим из точки H перпендикуляр HT на AB.

$HTLN$ — прямоугольник $\Longrightarrow$ $HT = LN = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Угол MTH — искомый
(так как $MH \perp AB,\ MH \perp HT,\ HT \parallel AE,\ MT \in ABM$).

$$\operatorname{tg}\angle MTH = \frac{MH}{TH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

С3. $\dfrac{2^{2|x-3|}+4}{5} < 2^{|x-3|}$.

Замена $2^{|x-3|} = t$.

$\dfrac{t^2+4}{5} < t;$

$t^2 - 5t + 4 < 0;$
$(t-1)(t-4) < 0;$
$1 < t < 4;$
$2^0 < 2^{|x-3|} < 2^2;$
$0 < |x-3| < 2;$

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ -2 < x - 3 < 2; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \neq 3, \\ 1 < x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $(1;3) \cup (3;5)$.

С4. Пусть A — центр окружности радиуса 4, B — центр окружности радиуса 8, K и M — соответственно точки касания общей касательной KM с этими окружностями. Возможны 2 случая.
1) Отрезки KM и AB не пересекаются (см. рис. 73).

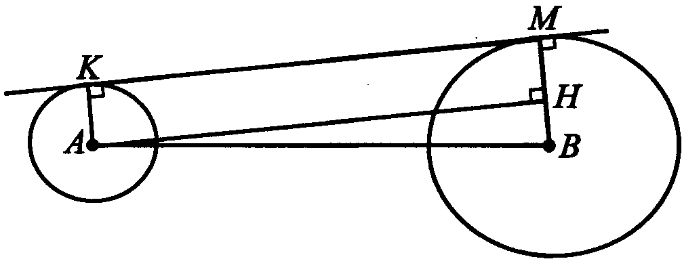


Рис. 73.

Опустим из точки A перпендикуляр AH на BM. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $AK \perp KM$ и $BM \perp KM \Rightarrow AKMH$ — прямоугольник, то есть $AH = KM = 5$, $MH = AK = 4$.

Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{AH^2 + (BM - MH)^2} = \sqrt{5^2 + (8-4)^2} =$
$= \sqrt{41}$.

2) Отрезок KM и AB пересекаются, $KM \cap AB = T$ (см. рис. 74).

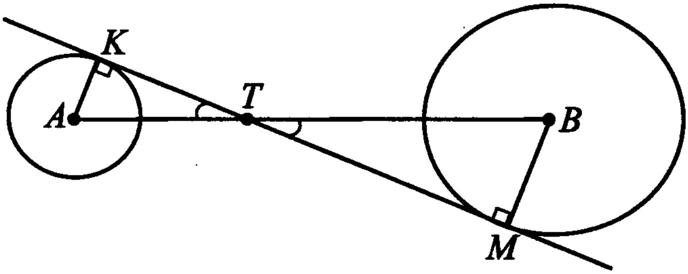


Рис. 74.

$\triangle AKT \sim \triangle BMT$ (по первому признаку: $\angle AKT = \angle BMT = 90°$, $\angle ATK = \angle BTM$ как вертикальные).

$\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{KT}{TM} = \dfrac{AK}{BM} = \dfrac{4}{8}$;

$AB = 3AT$, $KT = \dfrac{KM}{3} = \dfrac{5}{3}$.

Из $\triangle AKT$ по теореме Пифагора:

$AT^2 = AK^2 + KT^2$, $AB = 3\sqrt{AK^2 + KT^2} = 3\sqrt{4^2 + \dfrac{25}{9}} = \sqrt{169} = 13$.

Ответ: $\sqrt{41}$, 13.

С5. Пусть $a \leqslant 0$. Тогда при $x \in [2;3]$ имеем: $x - a > 0,\ x - 6a > 0, \implies$ $\dfrac{x-a}{x-6a} > 0$, что противоречит условию.

Следовательно, $a > 0$. Тогда решением неравенства $\dfrac{x-a}{x-6a} < 0$ будет интервал $x \in (a; 6a)$. По условию $[2;3] \subset (a;6a) \iff$

$$\begin{cases} a < 2, \\ 6a > 3; \end{cases} \iff \begin{cases} a < 2, \\ a > \frac{1}{2}; \end{cases} \iff a \in (0{,}5; 2).$$

Ответ: $(0{,}5;2)$.

С6. $\dfrac{n^2+13}{n+1} \in N \Leftrightarrow n^2 + 13 \vdots n+1 \Leftrightarrow n^2 + 13 - n(n+1) \vdots n+1 \Leftrightarrow$ $13 - n \vdots n+1 \Leftrightarrow 13 - n + n + 1 \vdots n+1 \Leftrightarrow 14 \vdots n+1$.

Так как $n+1 \in N$, $n+1 \geqslant 2$, то $\left[\begin{array}{l} n+1 = 2, \\ n+1 = 7, \\ n+1 = 14; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1, \\ n = 6, \\ n = 13. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 6; 13.

Решение варианта №14

В1. Так как 1609 м = 1,609 км, то 75 (миль/час) = $75 \cdot 1{,}609 =$ $= 120{,}675$ (км/ч). Округляя до целого, получаем скорость 121 км/ч.

Ответ: 121.

В2. Наибольшая среднесуточная температура — наибольшая из ординат жирных точек. По графику определяем искомую величину, которая равна 3,5°С.

Ответ: 3,5.

В3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 27;\ (3^{-1})^{x-4} = 3^3;\ 3^{4-x} = 3^3;\ 4 - x = 3;\ x = 1.$

Ответ: 1.

В4. $AC = AB\cos A = 25 \cdot 0{,}28 = 7$ (см. рис. 75), тогда по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 25^2 - 7^2 = 576 = 24^2$, $BC = 24$.

Ответ: 24.

В5. При покупке у поставщика А придётся заплатить $2\,200 \cdot 110 + 17\,400 = 259\,400$.

Цена 110м^3 пенобетона у поставщика Б равна $2\,300 \cdot 110 = 253\,000 > 250\,000$. Значит, за покупку с доставкой придётся заплатить 253 000.

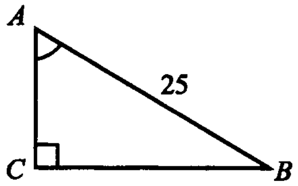


Рис. 75.

Нужно приобрести 110 м^3 $>$ 100 м^3 пенобетона, значит, при заказе у поставщика В доставка бесплатно, то есть всего придётся заплатить $2\,500 \cdot 110 = 275\,000$.

Итак, наименьшая стоимость равна 253 тысячи рублей.

Ответ: 253.

B6. Обозначим точки $A(2;2)$, $B(9;6)$, $C(11;2)$, $D(9;2)$ (см. рис. 76). Сторона AC параллельна оси абсцисс, BD — оси ординат. Следовательно, $BD \perp AC$ и значит, BD — высота треугольника ABC.

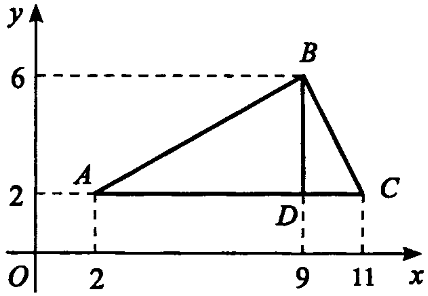


Рис. 76.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18.$$

Ответ: 18.

B7. $5 \cdot 4^{\log_2 3+1} = 5 \cdot (2^2)^{\log_2 3+1} = 5 \cdot 2^{2(\log_2 3+1)} = 5 \cdot 2^{2\log_2 3+2} =$
$= 5 \cdot 2^{\log_2 9} \cdot 2^2 = 5 \cdot 9 \cdot 4 = 180.$

Ответ: 180.

B8. Касательная к графику функции $f(x)$ в некоторой точке параллельна прямой $y = -x + 2$, если значение производной функции в этой точке равно угловому коэффициенту прямой, то есть $f'(x) = -1$. По графику видно, что $f'(x)$ принимает значение -1 в двух точках.

Ответ: 2.

B9. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $V_{\text{цил.}} = \pi R^2 h$, тогда $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}V_{\text{цил.}} = \frac{1}{3}\cdot 12 = 4$.

Ответ: 4.

B10. Необходимо найти наибольшее значение x, при котором $y(x) \geqslant 19$. Имеем

$-\frac{1}{270}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \geqslant 19;$
$-x^2 + 180x + 630 \geqslant 5130;$
$x^2 - 180x + 4500 \leqslant 0;$
$(x-30)(x-150) \leqslant 0;$
$30 \leqslant x \leqslant 150.$

Наибольшее значение x равно 150.

Ответ: 150.

B11. $y'(x) = -5\sin x - 7$, $y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$, значит, наименьшее значение принимает при $x = 0$.

$y(0) = 5\cdot\cos 0 - 7\cdot 0 + 4 = 9.$

Ответ: 9.

B12. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч. На прямой путь лодка затратила $\frac{144}{x-2}$ часа, а на обратный — $\frac{144}{x+2}$ часа. По условию, $\frac{144}{x-2} = \frac{144}{x+2} + 3$.

Так как по смыслу задачи $x > 2$, то получаем
$48(x+2) = 48(x-2) + (x-2)(x+2)$; $x^2 = 49\cdot 4$; $x = 14$.

Ответ: 14.

C1. $(\log_2 x + 2\log_x 2)(\log_2 x - 2\log_x 2) = 3$.
ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.
Замена $\log_x 2 = t$, $t \neq 0$.

$\left(\frac{1}{t} + 2t\right)\left(\frac{1}{t} - 2t\right) = 3.$

$\frac{1}{t^2} - 4t^2 = 3$. Так как $t \neq 0$, то
$1 - 4t^4 = 3t^2;$
$4t^4 + 3t^2 - 1 = 0;$
$(4t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0;$

$t_1 = \frac{1}{2}$, $\log_x 2 = \frac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}} = 2$, $x = 4$;

$t_2 = -\frac{1}{2}$, $\log_x 2 = -\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}} = 2$, $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $4; \frac{1}{4}$.

C2. Пусть M — середина CD (см. рис. 77), $DM = MS = 1$. Так как $SABCD$ правильная пирамида, то $SO \perp ABC$, где O — центр квадрата $ABCD$.

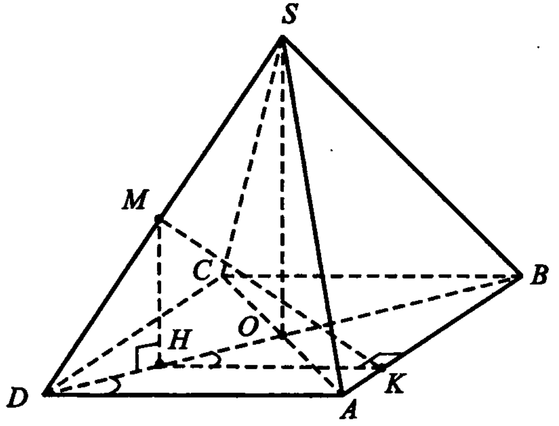


Рис. 77.

Из $\triangle ADB$ по теореме Пифагора

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2}$, $DO = \frac{BD}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Опустим из M перпендикуляр MH на плоскость ABC. Так как отрезок DO является проекцией отрезка DS на плоскость ABC, то $H \in DO$.

По теореме Фалеса $\frac{DH}{HO} = \frac{DM}{MS} = 1$ (так как $MH \parallel OS$ как перпендикуляр к одной плоскости $ABCD$).

$DH = \frac{DO}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $BH = HO + OB = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Опустим из точки H перпендикуляр HK на AB. Так как $HK \parallel AD$, то $\angle BHK = \angle BDA$ (соответственные) и $\triangle BHK \sim \triangle BDA$ (прямоугольные с равными острыми углами).

$\frac{HK}{AD} = \frac{BH}{BD}$; $HK = AD \cdot \frac{BH}{BD} = 1 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$.

Из ΔSOD находим

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$;

MH — средняя линия $\Delta SDO \Longrightarrow MH = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{7}{8}}$.

Из ΔMHK по теореме Пифагора:

$MK = \sqrt{MH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{7}{8} + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

$\sin\angle MKH = \frac{MH}{MK} = \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \frac{4}{\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{14}{23}}$.

Это и есть искомый синус, так как

$MK \in ABM$, $HK \parallel AD$, $MH \perp AB$, $MH \perp HK$.

Ответ: $\sqrt{\frac{14}{23}}$.

С3. $\frac{5^{2|x+1|} + 5}{6} < 5^{|x+1|}$.

Замена $5^{|x+1|} = t$.

$\frac{t^2 + 5}{6} < t$;

$t^2 - 6t + 5 < 0$;

$(t - 1)(t - 5) < 0$;

$1 < t < 5$;

$5^0 < 5^{|x+1|} < 5^1$;

$0 < |x + 1| < 1$;

$\begin{cases} x \neq -1, \\ -1 < x + 1 < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ -2 < x < 0. \end{cases}$

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0)$.

С4. Пусть A — центр окружности радиуса 1, B — центр окружности радиуса 7, K и M — соответственно точки касания общей касательной KM с этими окружностями. Тогда $AK \perp KM$ и $BM \perp KM$ как радиусы окружностей, проведённые в точку касания. Возможны 2 случая.

1) Отрезки KM и AB не пересекаются (см. рис. 78).

Опустим из точки A перпендикуляр AH на BM. $AKMH$ — прямоугольник, поэтому $AH = KM$, $MH = AK = 1$.

Из ΔAHB находим

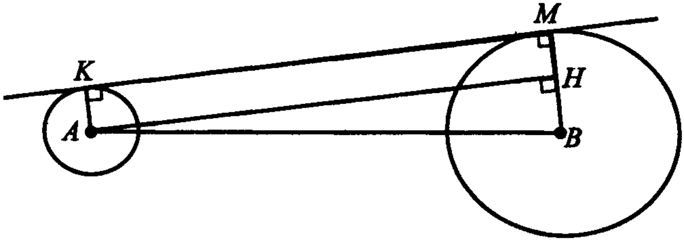


Рис. 78.

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$; $KM = 8$.

2) Отрезок KM и AB пересекаются, $KM \cap AB = T$ (см. рис. 79).

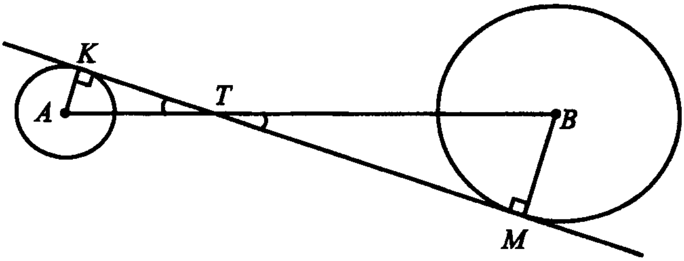


Рис. 79.

$\Delta AKT \sim \Delta BMT$ (по первому признаку: $\angle AKT = \angle BMT = 90°$, $\angle ATK = \angle BTM$ как вертикальные).

$\frac{AT}{BT} = \frac{KT}{TM} = \frac{AK}{BM} = \frac{1}{7}$;

$KM = 8KT,\ AT = \frac{AB}{8} = \frac{5}{4}$.

Из ΔAKT находим

$KT^2 = AT^2 - AK^2,\ KM = 8\sqrt{\frac{25}{16} - 1} = 8\sqrt{\frac{9}{16}} = 6$.

Ответ: 6; 8.

C5. $a = 0$ не удовлетворяет условию.

Пусть теперь $a \neq 0$. $\frac{x - 2a}{x + 2a} < 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x-2a}{x+a}<0,\\ a>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x-2a}{x+a}<0,\\ a<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-a;2a),\\ a>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(2a;-a),\\ a<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как исходное неравенство должно выполняться при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}[-1;1]\subset(-a;2a),\\ a>0;\end{cases}\\ \begin{cases}[-1;1]\subset(2a;-a),\\ a<0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-a<-1,\\ 2a>1,\\ a>0;\end{cases}\\ \begin{cases}2a<-1,\\ -a>1,\\ a<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a>1,\\ a<-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

С6. $\dfrac{m^2-4}{m+3}\in Z \Leftrightarrow m^2-4 \,\vdots\, m+3 \Leftrightarrow m^2-4-m(m+3) \,\vdots\, m+3 \Leftrightarrow$

$3m+4 \,\vdots\, m+3 \Leftrightarrow 3m+4-3(m+3) \,\vdots\, m+3 \Leftrightarrow 5 \,\vdots\, m+3.$

Отсюда: $\begin{cases}m+3=-5,\\ m+3=-1,\\ m+3=1,\\ m+3=5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-8,\\ m=-4,\\ m=-2,\\ m=2.\end{cases}$

Ответ: -8; -4; -2; 2.

Решение варианта №15

В1. $100\%-13\%=87\%$; $\dfrac{13\,485\cdot 100}{87}=15\,500.$

Ответ: 15 500.

В2. $300n-200n=2700$, $100n=2700$, $n=\dfrac{2700}{100}=27.$

Ответ: 27.

В3. $5^{3x+7}=0{,}04$; $5^{3x+7}=5^{-2}$; $3x+7=-2$; $3x=-9$; $x=-3$.

Ответ: -3.

В4. $\sin A=\dfrac{12}{13}$, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg} A=\dfrac{12}{13}:\dfrac{5}{13}=\dfrac{12}{5}$.

$CH=AH\cdot\operatorname{tg} A=5\cdot\dfrac{12}{5}=12$ (см. рис. 80).

Ответ: 12.

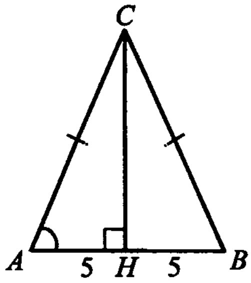


Рис. 80.

B5. Бетонный: $4 \cdot 700 + 45 \cdot 250 = 2\,800 + 11\,250 = 14\,050$.

Пеноблочный: $2\,200 \cdot 6 + 3 \cdot 250 = 13\,200 + 750 = 13\,950$.

Ответ: 13 950.

B6. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту: $S = AB \cdot DH = 3 \cdot 8 = 24$ (см. рис. 81).

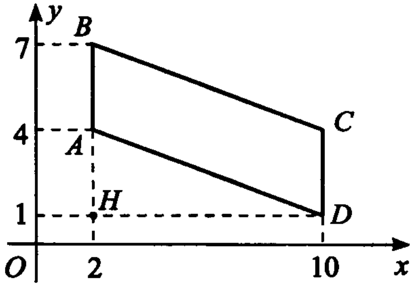


Рис. 81.

Ответ: 24.

B7. $7^{3\log_7 4} = 7^{\log_7 4^3} = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

B8. На отрезке $[2; 6]$ производная функции $f(x)$ положительна. Значит, на этом отрезке функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение в точке $x = 6$.

Ответ: 6.

B9. Пусть a — сторона куба. Тогда по теореме Пифагора $a^2+a^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$. Следовательно, $a = 3$. Тогда $V = a^3 = 27$.

Ответ: 27.

B10. Необходимо найти минимальное значение x, при котором $y(x) \geqslant 20$.

Имеем: $-\frac{1}{270}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \geqslant 20$, $\frac{1}{270}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} + 20 \leqslant 0$,

$x^2 - 180x - 90 - 5400 \leqslant 0$, $x^2 - 180x - 4500 \leqslant 0$,
$x_{1,2} = 90 \pm \sqrt{8100 - 4500} = 90 \pm 60$, $30 \leqslant x \leqslant 150$.

Ответ: 30.

B11. $y' = 15 - 4\cos x$. Так как $y' > 0$, то $y(x)$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Следовательно, наибольшее значение $y(0) = 15{\cdot}0 - 4\sin 0 + 6 = 6$.

Ответ: 6.

B12. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Из условия задачи следует таблица

	$v\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$	t (ч)	S (км)
По течению	$17 + x$	$\frac{140}{17+x}$	140
Против течения	$17 - x$	$\frac{140}{17-x}$	140

Имеем уравнение: $\frac{140}{17-x} - \frac{140}{17+x} = 3$;
$140x + 2380 + 140x - 2380 = -3x^2 + 867$;
$x_{12} = \frac{-140 \pm \sqrt{19600 + 2601}}{3} = \frac{-140 \pm 149}{3}$;

$x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{289}{3}$ (x_2 не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: 3.

C1. $\begin{cases} \frac{2x-2}{x-y} - \frac{3y}{x+y} = 3, \\ \frac{6x-6y}{x-1} + \frac{5x+5y}{y} = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{x-1}{x-y} - 3 \cdot \frac{y}{x+y} = 3, \\ 6 \cdot \frac{x-y}{x-1} + 5 \cdot \frac{x+y}{y} = 7. \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq \pm y$, $x \neq 1$, $y \neq 0$. Обозначим $\frac{x-1}{x-y} = U$, $\frac{y}{x+y} = V$.

Система уравнений примет вид: $\begin{cases} 2U - 3V = 3, \\ \frac{6}{U} + \frac{5}{V} = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 1{,}5(V+1), \\ \frac{4}{V+1} + \frac{5}{V} = 7; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U = 1{,}5(V+1), \\ \left[\begin{array}{l} V = 1, \\ V = -\dfrac{5}{7}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} V = 1, \\ U = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} V = -\dfrac{5}{7}, \\ U = \dfrac{3}{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-y} = 3, \\ \dfrac{y}{x+y} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-y} = \dfrac{3}{7}, \\ \dfrac{y}{x+y} = -\dfrac{5}{7}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 = 3x-3y, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = 7-3y, \\ x = -\dfrac{12y}{5}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{28}{11}, \\ y = -\dfrac{35}{33}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{28}{11}; -\frac{35}{33}\right)$.

С2. Проведем $PK \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow PK \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1P на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1P$ — искомый угол (см. рис. 82).

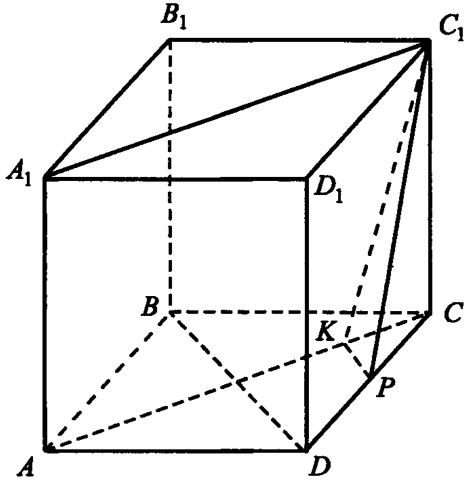


Рис. 82.

$$\sin\angle KC_1P = \frac{KP}{C_1P}$$

Обозначим ребро куба через a.

$$KP = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}\cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4};\ C_1P = \sqrt{CC_1^2 + CP^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ \sin\angle KC_1P = \frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{4\cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

С3. $\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{4}}\frac{x+1}{4x-1}$

ОДЗ: $\begin{cases} \log_4\frac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}}\frac{x+1}{4x-1} > 0, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1, \\ \frac{4x-1}{x+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \frac{x+1}{4x-1} < 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-2}{4x-1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Решим исходное неравенство на ОДЗ

$$\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1} < \log_3\left(\log_{\frac{1}{4}}\frac{x+1}{4x-1}\right)^{-1},\ \log_4\frac{4x-1}{x+1} < \left(\log_4\frac{4x-1}{x+1}\right)^{-1}.$$

Обозначим $\log_4\frac{4x-1}{x+1} = t$. Неравенство примет вид:

$$t < \frac{1}{t},\ t - \frac{1}{t} < 0,\ \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0;\ t < -1;\ 0 < t < 1.$$

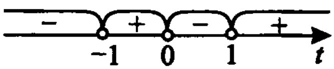


Рис. 83.

Вернёмся к исходным переменным.

1. $\begin{cases} \log_4 \dfrac{4x-1}{x+1} < -1, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x+1} < \dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \dfrac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$

Решений нет.

2. $\begin{cases} \log_4 \dfrac{4x-1}{x+1} > 0, \\ \log_4 \dfrac{4x-1}{x+1} < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x+1} > 1, \\ \dfrac{4x-1}{x+1} < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

С4. Пусть сторона правильного треугольника ABC равна a. Возможны два случая расположения окружностей.

1. Окружности касаются внешним образом (рис. 84).

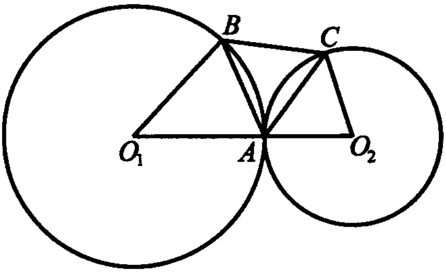


Рис. 84.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, $0 < \alpha < 90^o$, тогда $\angle O_2AC = 120^o - \alpha$. Из равнобедренного треугольника O_1AB по теореме синусов имеем:

$\dfrac{a}{\sin(180^o - 2\alpha)} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$, $a = 2R\cos\alpha$, $a = 10\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{10}$.

Аналогично, из треугольника O_2AC следует $a = 2r\cos(120^o - \alpha)$.

Имеем: $a = 2r\left(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$

$= 2r\left(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right) = r(-\cos\alpha + \sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2\alpha})$.

$a = -\frac{3a}{10} + 3\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}$, $13a = 3\sqrt{3}\sqrt{100 - a^2}$, $169a^2 = 27(100 - a^2)$,

$a > 0$, $a = \frac{15\sqrt{3}}{7}$.

2. Окружности касаются внутренним образом (рис.85).

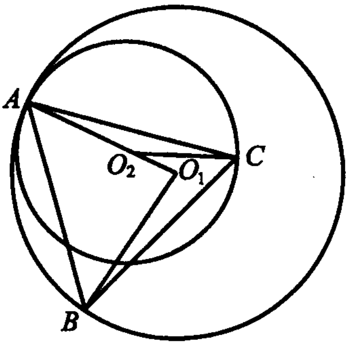


Рис. 85.

Обозначим $\angle O_1AB = \alpha$, тогда $\angle O_2AC = 60^o - \alpha$. Аналогично первому случаю, из равнобедренных треугольников O_1AB и O_2AC соответственно получаем $\cos\alpha = \frac{a}{10}$, $a = 3(\cos\alpha + \sqrt{3}\sqrt{1 - \cos^2\alpha})$,

$a = \frac{3a}{10} + 3\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{a^2}{100}}$, $7a = 3\sqrt{3}\sqrt{100 - a^2}$, $49a^2 = 27(100 - a^2)$, $a > 0$,

$a = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ответ: $\frac{15\sqrt{3}}{7}$; $\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

C5. $\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2}. \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2 \cdot 2^{x+3y} = 2^{2y}(3 \cdot 2^a - 4). \end{cases}$

Разделим обе части второго уравнения на 2^{2y}, учитывая, что $2^{2y} > 0$.

$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ (2^{2x-y})^2 - 2 \cdot 2^{x+y} = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases}$

Обозначим $2^{2x-y} = U$, $2^{x+y} = V$. Система примет вид:

$$\begin{cases} V - U = 1 - 2^a, \\ U^2 - 2V = 3 \cdot 2^a - 4. \end{cases} \quad (*)$$

Сложим удвоенное первое уравнение со вторым уравнением.

Получим: $\begin{cases} U^2 - 2U + 2 - 2^a = 0, \\ U > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2^a - 1}, \\ U > 0. \end{cases}$

Система $(*)$ имеет единственное решение, если либо $2^a - 1 = 0$, то есть $a = 0$, либо $1 - \sqrt{2^a - 1} < 0$, то есть $a \geqslant 1$, тогда либо $U = 1$, либо $U = 1 + \sqrt{2^a - 1}$. Из первого уравнения системы $V = U + 1 - 2^a$.

1) При $U = 1$ имеем $a = 0$, $V = 1$. Исходная система имеет единственное решение.

2) При $U = 1 + \sqrt{2^a - 1}$, $a \geqslant 1$ имеем $V = 2 + \sqrt{2^a - 1} - 2^a$.
   Имеем: $\begin{cases} 2 + \sqrt{2^a - 1} - 2^a > 0, \\ a \geqslant 1. \end{cases}$
   Решим неравенство $\sqrt{2^a - 1} > 2^a - 2$.
   Обозначим $2^a = t$, $t \geqslant 2$, так как $a \geqslant 1$.
   Неравенство примет вид $\sqrt{t - 1} > t - 2$, $t^2 - 5t + 5 < 0$,
   $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Так как $t \geqslant 2$, $2 \leqslant t < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.
   Вернемся к исходной переменной:
   $2 \leqslant 2^a < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$, $1 \leqslant a < \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $a = 0; 1 \leqslant a < \log_2 \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

С6. $-3xy - 10x + 13y + 35 = 0$.

Умножим обе части уравнения на -3. Уравнение примет вид:
$9xy + 30x - 39y - 105 = 0$; $3x(3y + 10) - 13(3y + 10) + 130 - 105 = 0$; $(3y + 10)(3x - 13) = -25$.

Делители числа -25: ± 1, ± 5, ± 25.

Множество всех целочисленных решений исходного уравнения содержится во множестве целочисленных решений систем уравнений:

1) $\begin{cases} 3x - 13 = 1, \\ 3y + 10 = -25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3}, \\ y = -\frac{35}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

2) $\begin{cases} 3x-13=-1, \\ 3y+10=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-13=5, \\ 3y+10=-5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=-5. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-13=-5, \\ 3y+10=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3}, \\ y=-\frac{5}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

5) $\begin{cases} 3x-13=25, \\ 3y+10=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{38}{3}, \\ y=-\frac{11}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

6) $\begin{cases} 3x-13=-25, \\ 3y+10=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=-3. \end{cases}$

Ответ: $(-4;-3)$, $(4;5)$, $(6;-5)$.

Решение варианта №16

B1. Для 5 литров вишнёвого компота необходимо $5:0{,}7=7\frac{5}{7}$ банок ёмкостью 700 мл. Значит, можно полностью заполнить 7 банок. Для 9 литров абрикосового компота необходимо $9:0{,}7=12\frac{6}{7}$ банок ёмкость 700 мл. Значит, можно полностью заполнить 12 банок. Итого: $7+12=19$.

Ответ: 19.

B2. Предприниматель 9 декабря потратил $30\cdot 150=4\,500$ (руб). Учитывая прибыль, он должен продать акции за $4\,500+4\,500=9\,000$ (руб). Значит, он должен продать каждую акцию по цене $9\,000:30=300$ (руб). Из графика следует, что такая стоимость одной акции будет 13 декабря.

Ответ: 13.

B3. $\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-9}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{2(2x-9)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$; $4x-18=x$; $3x=18$; $x=6$.

Ответ: 6.

B4. $\cos\angle BAK=\cos(180^o-\angle BAC)=-\cos\angle BAC$ (см. рис. 86).

$\sin\angle BAC=\frac{12}{12{,}5}=\frac{120}{125}=\frac{24}{25}$,

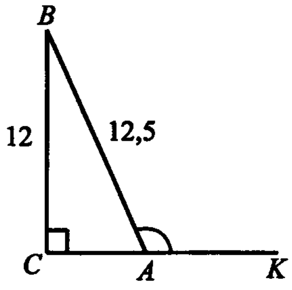


Рис. 86.

$$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} = \sqrt{\frac{625-576}{625}} = \frac{7}{25} = 0{,}28.$$

Тогда $\cos\angle BAK = -0{,}28$.

Ответ: $-0{,}28$.

B5. Каменный: $1\,500\cdot 8 + 220\cdot 10 = 12\,000 + 2\,200 = 14\,200$.

Бетонный: $670\cdot 5 + 220\cdot 49 = 3\,350 + 10\,780 = 14\,130$.

Самый дешёвый вариант обойдётся в 14,13 тысяч рублей.

Ответ: 14,13.

B6. $S_{ABCD} = S_{MFEN} - 2S_{AMB} - 2S_{AFD} = 8\cdot 6 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 7 =$ $= 48 - 5 - 7 = 36$ (см. рис. 87).

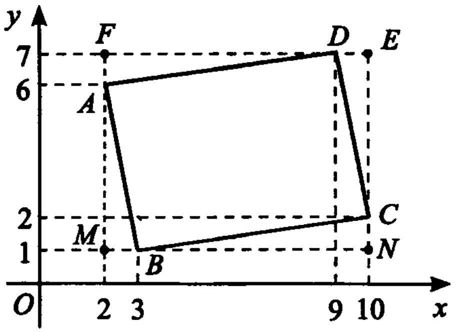


Рис. 87.

Ответ: 36.

B7. $144^{\log_{12}14} = 12^{2\log_{12}14} = 12^{\log_{12}14^2} = 14^2 = 196$.

Ответ: 196.

B8. На интервале $(-1; 5)$ производная функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус, причём $f'(3) = 0$. Значит, $x = 3$ является точкой экстремума (в данном случае это точка максимума).

Ответ: 3.

B9. $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 3\sqrt{3}$, $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{S_{\text{осн}}} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 4}{6\cdot 2^2\sqrt{3}} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

B10. Общее сопротивление электросети должно быть не менее 40 Ом, то есть $\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2} \geqslant 40$. Тогда $\dfrac{R_1\cdot 120}{R_1+120} \geqslant 40$, $120R_1 \geqslant 40R_1 + 4800$, $80R_1 \geqslant 4800$, $R_1 \geqslant 60$.

Ответ: 60.

B11. $y' = 2\cos x - 8$. Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Значит, наименьшее значение $y(0) = 2\cdot\sin 0 - 8\cdot 0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

B12. Пусть v км/ч — собственная скорость теплохода.
Тогда $(v-2)$ км/ч — скорость против течения, $(v+2)$ км/ч — скорость по течению. Из условия задачи следует уравнение $\dfrac{221}{v-2} - \dfrac{221}{v+2} = 4$.
$221v + 442 - 221v + 442 = 4v^2 - 16$, $4v^2 = 16 + 884$, $4v^2 = 900$, $v^2 = 225$, $v = \pm 15$. Так как по условию $v > 0$, то $v = 15$.

Ответ: 15.

C1. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{y+1} - \dfrac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \dfrac{3y+3}{3x-1} + \dfrac{2x+2}{3y-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1}{y+1} - \dfrac{3y-1}{x+1} = 2, \\ 3\cdot\dfrac{y+1}{3x-1} + 2\cdot\dfrac{x+1}{3y-1} = 1. \end{cases}$

ОДЗ. $x \neq -1$, $y \neq -1$, $x \neq \frac{1}{3}$, $y \neq \frac{1}{3}$.

Обозначим $\dfrac{3x-1}{y+1} = U$, $\dfrac{3y-1}{x+1} = V$.

Система уравнений примет вид: $\begin{cases} U - V = 2, \\ \dfrac{3}{U} + \dfrac{2}{V} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 2 + V, \\ \dfrac{3}{2+V} + \dfrac{2}{V} = 1; \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} U = 2 + V, \\ \left[\begin{array}{l} V = -1, \\ V = 4 \end{array}\right. \end{cases}; \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} V = -1, \\ U = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} V = 4, \\ U = 6. \end{cases} \end{array}\right.$

Вернёмся к исходным переменным:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{3x-1}{y+1}=1,\\ \dfrac{3y-1}{x+1}=-1,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{3x-1}{y+1}=6,\\ \dfrac{3y-1}{x+1}=4;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-y=2,\\ x+3y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}3x-6y=7,\\ 4x-3y=-5;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{3}{5},\\ y=-\dfrac{1}{5},\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{17}{5},\\ y=-\dfrac{43}{15}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right),\left(-\frac{17}{5};-\frac{43}{15}\right)$.

С2. Проведём $KQ \parallel BD$, $BD \perp AA_1C_1 \Rightarrow KQ \perp AA_1C_1$, тогда прямая C_1K — проекция прямой C_1Q на плоскость AA_1C_1 и $\angle KC_1Q$ — искомый угол (см. рис. 88). $\sin\angle KC_1Q = \dfrac{KQ}{C_1Q}$.

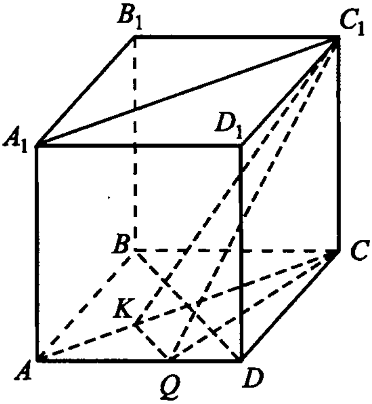


Рис. 88.

Обозначим ребро куба через a.

$KQ = \dfrac{1}{4}\,BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $C_1Q = \sqrt{C_1C^2 + CQ^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{3a}{2}$,

$\sin\angle KC_1Q = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot 2}{4\cdot 3a} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

С3. $\log_9^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 1-\frac{x}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

$\frac{1}{4}\log_3^2 x \geqslant \log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}},$

$\log_3^2 x \geqslant \log_3^2\left(1-\frac{x}{4}\right),$

$\log_3^2 x - \log_3^2\left(1-\frac{x}{4}\right) \geqslant 0,$

$\left(\log_3 x - \log_3\left(1-\frac{x}{4}\right)\right)\left(\log_3 x + \log_3\left(1-\frac{x}{4}\right)\right) \geqslant 0,$

$$\log_3 \frac{4x}{4-x}\cdot\log_3\frac{x(4-x)}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \geqslant 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \geqslant 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 \frac{4x}{4-x} \leqslant 0, \\ \log_3 \frac{x(4-x)}{4} \leqslant 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{4x}{4-x} \geqslant 1, \\ x(4-x) \geqslant 4, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{4x}{4-x} \leqslant 1, \\ x(4-x) \leqslant 4, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} 0{,}8 \leqslant x \leqslant 4, \\ (x-2)^2 \leqslant 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0{,}8, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ (x-2)^2 \geqslant 0, \\ 0 < x < 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ 0 < x \leqslant 0{,}8. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0; 0{,}8] \cup \{2\}$.

С4. Учитывая длину радиусов и расстояние между центрами окружности, делаем вывод: окружности имеют две общие точки. Возможны два случая расположения прямой AC и отрезка O_1O_2.

1. Прямая AC и отрезок O_1O_2 не имеют общих точек (рис. 89)

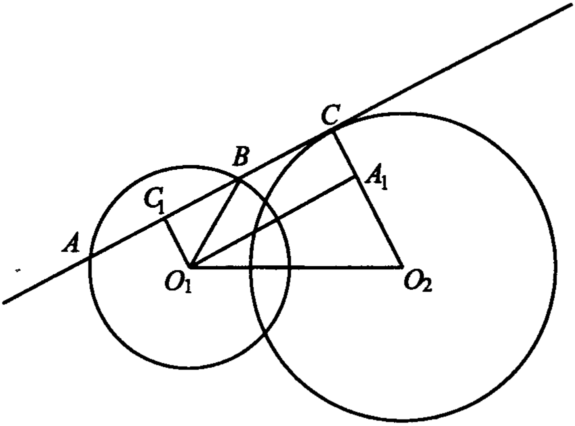


Рис. 89.

По свойству касательной $AC \perp O_2C$.

Проведем $O_1C_1 \parallel O_2C$, $O_1A_1 \parallel C_1C$, тогда $O_1C_1CA_1$ — прямоугольник. O_1C_1 —высота в $\triangle AO_1B$, значит, $AC_1 = C_1B$.

Обозначим $AC_1 = C_1B = x$, $O_1C_1 = y$. По условию $AB = 2BC$, значит, $BC_1 = BC = x$. Из $\triangle O_1C_1B$ имеем $x^2 + y^2 = 25^2$, из $\triangle O_1A_1O_2$ имеем $(2x)^2 + (30 - y)^2 = 50^2$,
$4(25^2 - y^2) + (30 - y)^2 = 2500$, $y^2 + 20y - 300 = 0$, $y > 0$, $y = 10$, $x = \sqrt{25^2 - 10^2} = 5\sqrt{21}$, $AB = 2x = 10\sqrt{21}$.

2. Прямая AC пересекает отрезок O_1O_2.

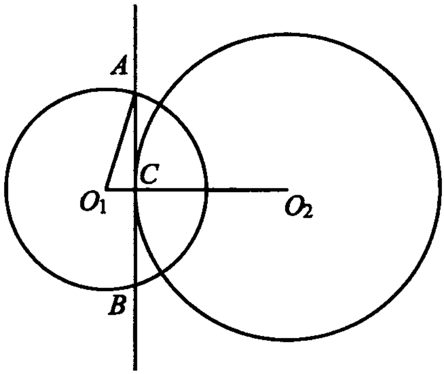


Рис. 90.

В этом случае $C \in O_1O_2$ и $AC \perp O_1O_2$. Из $\triangle ACO_1$
$AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C} = \sqrt{25^2 - (50-30)^2} = 15$. $AB = 2AC = 30$.

Ответ: $10\sqrt{21}$ или 30.

C5. $\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y\cdot 2^x) = a^3, \\ (1+2^x)(1-y\cdot 2^x) = a. \end{cases}$

1. Рассмотрим случай, когда $a = 0$. Учитывая, что $2^x > 0$ при любом значении x, получим $1 - y\cdot 2^x = 0$, $y = \dfrac{1}{2^x}$ при всех $x \in R$. Следовательно, $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.

2. Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$, $y \neq -1$. Обозначим $2^x = t$, $t > 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} t(y+1)(1-yt) = a^3, \\ (1+t)(1-yt) = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(y+1) = a^2(t+1), \\ (t+1)(1-ty) = a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{t+1-a}{t^2+t}, \\ t^2(a^2-1) + 2t(a^2-1) + a^2 + a - 1 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

При $|a| = 1$ второе уравнение системы (1), а значит, и сама система, решений не имеют, что удовлетворяет условию задачи.

При $a^2 - 1 \neq 0$ второе уравнение системы (1) приведем к виду:

$t^2 + 2t + 1 + \dfrac{a}{a^2-1} = 0.$

$$(t+1)^2 = \frac{a}{1-a^2} \qquad (2)$$

Уравнение (2) не имеет решений в двух случаях:

1) если $\dfrac{a}{1-a^2} < 0$,

2) если $\dfrac{a}{1-a^2} > 0$ и $t \leqslant 0$.

Рассмотрим эти случаи:

1) $\dfrac{a}{1-a^2} < 0$. $a \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

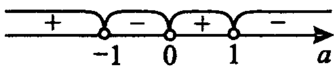


Рис. 91.

$$2)\begin{cases} \dfrac{a}{1-a^2} > 0, \\ -1 + \sqrt{\dfrac{a}{1-a^2}} \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1, \\ a < -1, \end{array}\right. \\ \dfrac{a^2 + a - 1}{a^2 - 1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $\dfrac{a^2 + a - 1}{a^2 - 1} \geqslant 0$

$a^2 + a - 1 = 0$, $a_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

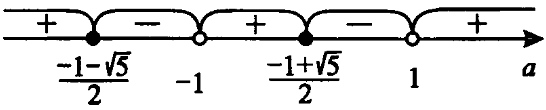


Рис. 92.

$a \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $-1 < a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $a > 1$.

Учитывая, что $a < -1$ или $0 < a < 1$ имеем
$a \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $0 < a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a > 1$.

Объединяя полученные решения, делаем вывод:
$a \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $-1 \leqslant a < 0$; $0 < a \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $a \geqslant 1$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup [-1; 0) \cup \left(0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

С6. $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$.

Умножим обе части уравнения на 3. Уравнение примет вид:
$9xy + 48x + 39y + 183 = 0$,
$3y(3x + 13) + 16(3x + 13) - 208 + 183 = 0$,
$(3x + 13)(3y + 16) = 25$.
Делители числа 25: ± 1, ± 5, ± 25.
Множество всех целочисленных решений исходного уравнения содержится во множестве целочисленных решений систем уравнений:

$$1)\begin{cases} 3x + 13 = 1, \\ 3y + 16 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 3. \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 3x+13=-1, \\ 3y+16=-25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{14}{3}, \\ y=-\dfrac{41}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

3) $\begin{cases} 3x+13=5, \\ 3y+16=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{3}, \\ y=-\dfrac{11}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

4) $\begin{cases} 3x+13=-5, \\ 3y+16=-5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6, \\ y=-7. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+13=25, \\ 3y+16=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-5. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+13=-25, \\ 3y+16=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{38}{3}, \\ y=-\dfrac{17}{3}; \end{cases}$ — не удовлетворяет условию $x, y \in Z$.

Ответ: $(-6;-7), (-4;3), (4;-5)$.

Решение варианта №17

B1. 50 : 6,8 = 7,35. Наибольшее число круассанов равно 7.

Ответ: 7.

B2. Наименьшая стоимость равна 10; 10 · 18 = 180 (руб). Наибольшая стоимость равна 80; 80 · 18 = 1 440 (руб). Разность между ними и есть наибольшая прибыль: 1 440 − 180 = 1 260 (руб).

Ответ: 1 260.

B3. $\sqrt{57-3x}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 57-3x \geqslant 0, \\ 57-3x=9; \end{cases} \Leftrightarrow 57-3x=9 \Leftrightarrow x=16.$

Ответ: 16.

B4. На рисунке 93 изображен параллелограмм $ABCD$.

$\cos\angle B=\cos(180^\circ-\angle A)=-\cos\angle A=-\sqrt{1-0,28^2}=-0,96.$

Ответ: $-0,96$.

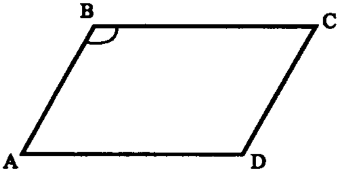


Рис. 93.

B5. Составим таблицу выбора тарифного плана.

	Повременный	**Комбинированный**	**Безлимитный**
Абонентская плата	100 руб.	250 руб.	330 руб.
600 минут	$600 \cdot 0,4 = 240$ (руб)	$(600-480) \cdot 0,3 = 36$ (руб)	0 руб.
Итого:	$100+240 = 340$ (руб)	$250 + 36 = 286$ (руб)	330 руб.

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 600 минут разговоров в месяц является тарифный план «Комбинированный». По этому тарифному плану за 500 минут разговоров будет выплачено $250 + 0{,}3 \cdot (500 - 480) = 256$ (руб).

Ответ: 256.

B6. $S_{\text{трапеции}} = S_{\text{прямоуг.}} - 2S_{\triangle}$; $S_{\text{прямоуг.}} = 8 \cdot 6 = 48$; $S_{\triangle} = \dfrac{8 \cdot 2}{2} = 8$; $S_{\text{трапеции}} = 48 - 16 = 32$.

Ответ: 32.

B7. $\dfrac{\left(\sqrt[11]{5 \cdot a^7}\right)^{33}}{a^{21}} = \dfrac{\left(\sqrt[11]{5^{33} \cdot a^{33 \cdot 7}}\right)}{a^{21}} = \dfrac{5^3 \cdot a^{21}}{a^{21}} = 5^3 = 125.$

Ответ: 125.

B8. Угловой коэффициент прямой $y = -3x + 5$ равен -3. Следовательно, касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 5$ или совпадает с ней в таких точках x_0, в которых $f'(x_0) = -3$. Из рисунка следует, что график производной функции $y = f'(x)$ пересекается с прямой $y = -3$ в четырех точках.

Ответ: 4.

B9. $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Тогда $8\pi = 2\pi \cdot r \cdot 2$; $r = 2$. Значит, диаметр основания цилиндра $d = 2r = 4$.

Ответ: 4.

B10. Высоту, на которую поднимется уровень воды в колодце после дождя, можно определить как разность расстояний, пролетаемых падающими камушками: $-5(0{,}4^2 - 0{,}8^2) = -5(0{,}16 - 0{,}64) = 5 \cdot 0{,}48 = 2{,}4$ (м).

Ответ: 2,4.

B11. $y' = 2\cos x - 3$; Так как $y' < 0$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\pi; 0\right]$. Значит, наименьшее значение равно $y(0) = 2\sin 0 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$.

Ответ: -2.

B12. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда $(18 + x)$ км/ч — скорость теплохода по течению реки, $(18 - x)$ км/ч — скорость теплохода против течения реки. Время, затраченное на движение по течению реки, равно $\frac{315}{18+x}$ ч. Время, затраченное на дорогу назад, равно $\frac{315}{18+x}$ ч.

Составим уравнение: $\frac{315}{18+x} + \frac{315}{18-x} = 36$.

Решим его: $315(18 - x) + 315(18 + x) = 36(18^2 - x^2)$; $315(18-x+18+x) = 36(18^2-x^2)$; $315 \cdot 36 = 36(18^2-x^2)$; $x^2 = 324-315$; $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. При этом x_2 не удовлетворяет условию, так как скорость должна быть положительна.

Ответ: 3.

C1. $\begin{cases} 3\sin y - \cos^2 y + 6\cos x = 0, \\ 2\sin^2 x + 5\cos x = 4. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы.

$2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$,
$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$,
$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Замена $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$ приводит к уравнению $2t^2 - 5t + 2 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$, при этом $t_2 \notin [-1; 1]$.

$\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Подставим найденное значение $\cos x = \frac{1}{2}$ в первое уравнение системы и решим его.

$3\sin y - \cos^2 y + 6 \cdot \frac{1}{2} = 0$,

$3\sin y - 1 + \sin^2 y + 3 = 0$,
$\sin^2 y + 3\sin y + 2 = 0$.

Замена $\sin y = v$, $v \in [-1; 1]$.
$v^2 + 3v + 2 = 0$;
$v_1 = -1$, $v_2 = -2$;
$\sin y = -1$, $v_2 \notin [-1; 1]$.

$y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); k, n \in Z.$

C2. Так как $CC_1 \perp ABCD$ и $CD \perp AD$, то $C_1D \perp AD$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу C_1DC (см. рис. 94).

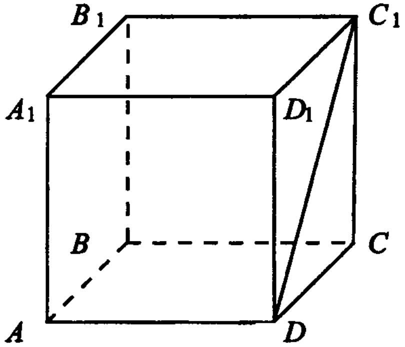


Рис. 94.

По условию $AC_1 = 2\sqrt{5}$; $AB = BC = 2$. Так как $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$, то $20 = 4 + 4 + CC_1^2$; $CC_1^2 = 12$; $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

Из ΔDC_1C имеем: $\operatorname{tg} \angle C_1DC = \frac{CC_1}{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Отсюда $\angle C_1DC = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

C3. $\begin{cases} \frac{1}{|(x-1)(x-2)|} + \frac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \frac{1}{|(x-3)(x-4)|} \geqslant 0{,}3, \\ |2x-5| \geqslant 3. \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$.

Решим второе неравенство системы.

$$|2x-5| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-5 \geqslant 3, \\ 2x-5 \leqslant -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geqslant 8, \\ 2x \leqslant 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. Будем решать первое неравенство системы в этой области. Замечаем, что здесь выражения $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ имеют одинаковый знак, поэтому первое неравенство системы можно записать в виде:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} \geqslant 0{,}3;$$

$$\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) \geqslant 0{,}3;$$

$\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-1} \geqslant 0{,}3$. Так как $x-1$ и $x-4$ имеют одинаковый знак, то можно домножить обе части на $(x-1)(x-4) > 0$.

$x - 1 - x + 4 \geqslant 0{,}3(x-1)(x-4)$;
$0{,}3(x-1)(x-4) \leqslant 3$;
$(x-1)(x-4) \leqslant 10$;
$x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$;
$(x+1)(x-6) \leqslant 0$;
$x \in [-1; 6]$.

Так как решали в области $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, то

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty), \\ x \in [-1; 6]. \end{cases}$$

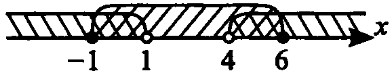


Рис. 95.

Ответ: $[-1; 1) \cup (4; 6]$.

С4. Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 925 - 900 = 25$ (см. рис. 96). $AH = 5$. Из $\triangle CBH$ по теореме Пифагора: $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 1000 - 900 = 100$; $CH = 10$. $AC = AH + HC = 15$.

Возможны два случая расположения точки D.

1) D лежит на отрезке AC (см. рис. 97). Так как $AD : DC = 3 : 2$, то $AD = \frac{3}{5}AC = 9$; $DC = \frac{2}{5}AC = 6$.

$DH = AD - AH = 9 - 5 = 4$.

Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 900 + 16 = 916$. $BD = 2\sqrt{229}$.

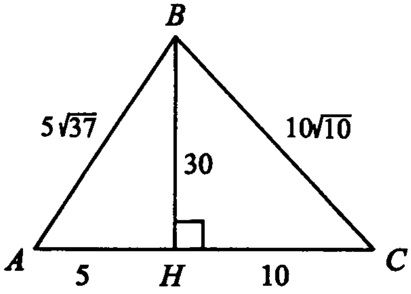


Рис. 96.

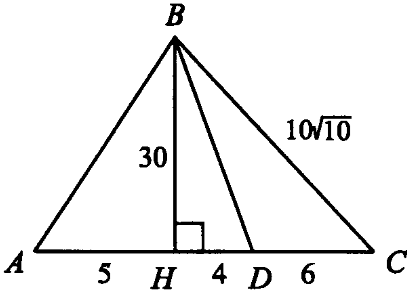


Рис. 97.

Из $\triangle CBH$: $\sin\angle C = \frac{BH}{BC} = \frac{30}{10\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

По теореме синусов искомый радиус R выражается из $\triangle BCD$:
$2R = \frac{BD}{\sin\angle C}$; $R = \frac{2\sqrt{229}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2290}}{3}$.

2) D лежит вне отрезка AC (см. рис. 98). Так как $AD > DC$, то D лежит на прямой AC за точкой C; $AD = AC + CD = \frac{3}{2}CD$. Отсюда $CD = 2AC = 30$.

$DH = HC + CD = 40$.
Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2$. $BD = 50$.

Из $\triangle BDH$: $\sin\angle D = \frac{BH}{BD} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$.

Из $\triangle BCD$ по теореме синусов выражаем искомый радиус:

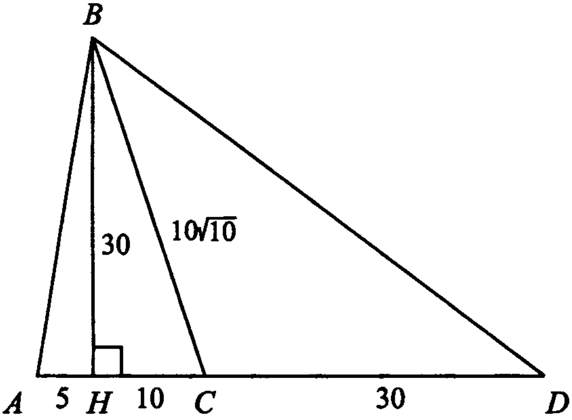


Рис. 98.

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle D};\ R = \frac{10\sqrt{10}\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{25\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{25\sqrt{10}}{3}$ или $\dfrac{\sqrt{2290}}{3}$.

С5. $$\frac{\log^2_{\frac{4a-7}{4}} x^2 + \log_{\frac{4a-7}{4}} x^4 \cdot \log_a x + \log_a^2 x}{(x-1)^2} \leqslant 0.$$

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} \dfrac{4a-7}{4} > 0, \\ \dfrac{4a-7}{4} \neq 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{7}{4}, \\ a \neq \dfrac{11}{4}, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Знаменатель на ОДЗ положителен, поэтому числитель должен быть неположителен.

$2^2 \log^2_{\frac{4a-7}{4}} x + 4\log_{\frac{4a-7}{4}} x \cdot \log_a x + \log_a^2 x \leqslant 0;$

$(2\log_{\frac{4a-7}{4}} x + \log_a x)^2 \leqslant 0;$

$2\log_{\frac{4a-7}{4}} x + \log_a x = 0;$

$\log_{\frac{4a-7}{4}} x = -\frac{1}{2}\log_a x;$

$\log_{\frac{4a-7}{4}} x = \log_{\frac{1}{a^2}} x.$

Так как $x \neq 1$, то $\frac{4a-7}{4} = \frac{1}{a^2}$; $4a - 7 = \frac{4}{a^2}$; $a = 2$ является решением уравнения. При $a > 0$ имеем: $f(a) = 4a - 7$ монотонно возрастает, $g(a) = \frac{4}{a^2}$ монотонно убывает. Следовательно, у уравнения $f(a) = g(a)$ не более одного решения.

Ответ: $a = 2$.

С6. Из условия следует: $1000a + a + 1 = b^2 \Leftrightarrow 1001a = b^2 - 1$, $a, b \in N$, $100 \leqslant a \leqslant 999$. Отсюда $100101 \leqslant b^2 \leqslant 1000000$; $316 \leqslant b \leqslant 1000$. $1001a = b^2 - 1$; $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a = (b-1)(b+1)$. Числа $b-1$ и $b+1$ не могут одновременно делиться ни на какое натуральное $p > 2$, так как иначе $(b+1) - (b-1) \vdots p$; $2 \vdots p$, что невозможно. Поэтому из

$(b-1)(b+1) \vdots (7 \cdot 11 \cdot 13)$ получаем 8 случаев:

1) $b - 1 \vdots 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b - 1 \geqslant 1001 \Rightarrow b \geqslant 1002$. Противоречие с $b \leqslant 1000$.

2) $b - 1 \vdots 7 \cdot 11$, $b + 1 \vdots 13 \Rightarrow b = 77k + 1$, $k \in N$, $5 \leqslant k \leqslant 12$. $b + 1 = 77k + 2 \equiv -k + 2 (\mathrm{mod}\ 13)$; $-k + 2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13)$ при $5 \leqslant k \leqslant 12$.

Здесь нет допустимых значений k, при которых $b + 1 \vdots 13$.

3) $b - 1 \vdots 7 \cdot 13$, $b + 1 \vdots 11 \Rightarrow b = 91k + 1$, $k \in N$, $4 \leqslant k \leqslant 10$. $b + 1 = 91k + 2 \equiv 3k + 2 (\mathrm{mod}\ 11)$; $3k + 2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$ при $4 \leqslant k \leqslant 10$.

Здесь нет допустимых значений k, при которых $b + 1 \vdots 11$.

4) $b - 1 \vdots 7$, $b + 1 \vdots 11 \cdot 13 \Rightarrow b = 143k - 1$, $k \in N$, $3 \leqslant k \leqslant 7$. $b - 1 = 143k - 2 \equiv 3k - 2 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3k - 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ при $k = 3$. Имеем: $b + 1 = 143 \cdot 3$, $b - 1 = 143 \cdot 3 - 2 = 427 = 61 \cdot 7$; $1001a = 143 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 7$; $a = 3 \cdot 61 = 183$.

5) $b - 1 \vdots 11$, $b + 1 \vdots 7 \cdot 13 \Rightarrow b = 91k - 1$, $k \in N$, $4 \leqslant k \leqslant 11$. $b - 1 = 91k - 2 \equiv 3k - 2 (\mathrm{mod}\ 11)$; $3k - 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$ при $k = 8$. Имеем: $b + 1 = 91 \cdot 8$, $b - 1 = 91 \cdot 8 - 2 = 726 = 66 \cdot 11$; $1001a = 91 \cdot 8 \cdot 66 \cdot 11$; $a = 8 \cdot 66 = 528$.

6) $b - 1 \vdots 11 \cdot 13$, $b + 1 \vdots 7 \Rightarrow b = 143k + 1$, $k \in N$, $3 \leqslant k \leqslant 6$. $b + 1 = 143k + 2 \equiv 3k + 2 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3k + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ при $k = 4$. Имеем: $b - 1 = 143 \cdot 4$, $b + 1 = 143 \cdot 4 + 2 = 574 = 82 \cdot 7$; $1001a = 143 \cdot 4 \cdot 82 \cdot 7$;

$a = 4 \cdot 82 = 328$.

7) $b - 1 \ \vdots\ 13$, $b + 1 \ \vdots\ 7 \cdot 11 \Rightarrow b = 77k - 1$, $k \in N$, $5 \leqslant k \leqslant 13$. $b-1 = 77k-2 \equiv -k-2 (\mathrm{mod}\ 13)$; $-k-2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13)$ при $k = 11$. Имеем: $b+1 = 77 \cdot 11$, $b - 1 = 77 \cdot 11 - 2 = 845 = 65 \cdot 13$; $1001a = 77 \cdot 11 \cdot 65 \cdot 13$; $a = 11 \cdot 65 = 715$.

8) $b+1 \ \vdots\ 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b+1 \geqslant 1001 \Rightarrow b \geqslant 1000$. Из $b \leqslant 1000$ получаем: $b = 1000$. Проверяем: $b+1 = 1001 \ \vdots\ 7 \cdot 11 \cdot 13$; $b-1 = 999$; $1001a = 1001 \cdot 999$; $a = 999$.

Ответ: 183, 328, 528, 715, 999.

Решение варианта №18

B1. Всего $53 + 48 = 101$ (яйцо). $101 : 19 = 5\frac{6}{19}$. Необходимо 6 инкубаторов.

Ответ: 6.

B2. Бизнесмен 4 июля купил 20 акций по 105 рублей, то есть потратил $20 \cdot 105 = 2\,100$ (руб). Четверть акций он продал 12 июля по цене 120 рублей, то есть получил $\frac{20}{4} \cdot 120 = 600$ (руб). Остальные акции он продал 15 июля по цене 60 рублей, то есть получил $\frac{3}{4} \cdot 20 \cdot 60 = 900$ (руб). В результате бизнесмен потерял $2\,100 - (600 + 900) = 600$ (руб).

Ответ: 600.

B3. $\sqrt{\frac{3x - 17}{7}} = 4$. Возведём в квадрат обе части уравнения, получим: $\frac{3x - 17}{7} = 16$; $3x - 17 = 16 \cdot 7$; $3x = 129$; $x = 43$. Проверка показывает, что $x = 43$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 43.

B4. $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{BE}{AE}$ (см. рис. 99). $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{17 - 7}{2} = 5$. $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. $\operatorname{tg} \angle BAD = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

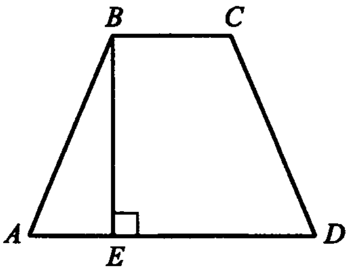


Рис. 99.

B5. Составим таблицу выбора тарифного плана.

Тарифный план	**Абонентская плата (руб)**	**Плата за трафик (руб)**	**Итого (руб):**
План «0»	0	$3 \cdot 600 = 1800$	1800
План «400»	500 руб. за 400 Мб трафика	$2 \cdot (700 - 500) = 400$	900
План «800»	750 руб. за 800 Мб трафика	0	750

Из таблицы следует, что наиболее выгодным для запланированных 700 Мб трафика в месяц является тарифный план “План «800»”. По этому тарифному плану за 600 Мб трафика пользователь заплатит 750 рублей.

Ответ: 750.

B6. $S_{\text{трапеции}} = \dfrac{(11-2)+(8-3)}{2} \cdot (6-1) = 35.$

Ответ: 35.

B7. $\dfrac{\sqrt{81\sqrt[11]{m}}}{\sqrt[11]{2048\sqrt{m}}} = \dfrac{\sqrt{3^4 \cdot m^{\frac{1}{11}}}}{\sqrt[11]{2^{11} \cdot m^{\frac{1}{2}}}} = \dfrac{3^2 \cdot m^{\frac{1}{22}}}{2 \cdot m^{\frac{1}{22}}} = 4\dfrac{1}{2} = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.

B8. Производная функции отрицательна в тех целых точках, которые принадлежат какому-нибудь промежутку убывания, за исключением точек, в которых производная равна нулю (в этих точках касательная к графику функции параллельна оси Ox) или не существует. Из рисунка определяем абсциссы таких точек: $-2, -1, 0, 1, 4, 5$. Таких точек 6.

Ответ: 6.

B9. Пусть a — ребро куба, тогда площадь поверхности куба равна $6a^2$. Если ее увеличить на 144, она станет равной $6a^2+144$. Пусть x — разность между новым значением длины ребра куба и a. Тогда $6(a+x)^2 = 6a^2+144$; $6(5+x)^2 = 6 \cdot 25 + 144$; $6(5+x)^2 = 294$; $(5+x)^2 = 49$; $5+x = 7$; $x = 2$.

Ответ: 2.

B10. $\sigma \cdot S \cdot T^4 \geqslant 2{,}7702 \cdot 10^{31}$; $5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot T^4 \cdot 6 \cdot 10^{24} \geqslant 2{,}7702 \cdot 10^{31}$; $T^4 \geqslant \dfrac{2{,}7702 \cdot 10^{31}}{5{,}7 \cdot 10^{16} \cdot 6}$; $T^4 \geqslant \dfrac{2{,}7702 \cdot 10^{15}}{34{,}2}$; $T^4 \geqslant 0{,}081 \cdot 10^{15}$; $T^4 \geqslant 81 \cdot 10^{12}$. Так как $T > 0$, то $T \geqslant 3 \cdot 10^3$.

Ответ: 3 000.

B11. $y' = 2\cos x - \dfrac{6}{\pi}$. Уравнение $2\cos x - \dfrac{6}{\pi} = 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\arccos\dfrac{3}{\pi}$, принадлежащий отрезку $\left[-\dfrac{5}{6}\pi;\ 0\right]$. Так как $y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\dfrac{5}{6}\pi;\ x_0\right)$ и $y'(x) > 0$ при $x \in (x_0;\ 0]$, то x_0 — единственная критическая точка непрерывной функции $y(x)$ на отрезке $\left[-\dfrac{5}{6}\pi;\ 0\right]$, являющаяся точкой минимума. Следовательно, наибольшее значение функция $y(x)$ принимает на одном из концов отрезка.

$$y\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = 2\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{5}{6}\pi + 1 = -2\sin\frac{\pi}{6} + 5 + 1 =$$

$= -2 \cdot \dfrac{1}{2} + 6 = -1 + 6 = 5$; $y(0) = 2\sin 0 - \dfrac{6}{\pi} \cdot 0 + 1 = 1$. Наибольшее значение равно 5.

Ответ: 5.

B12. Пусть x км/ч — скорость второго теплохода, тогда $(x-3)$ км/ч — скорость первого. Время пути первого теплохода $\dfrac{418}{x-3}$ часов, а второго — $\dfrac{418}{x}$ часов. По условию разность между ними составила 3 часа. Составим уравнение: $\dfrac{418}{x-3} - \dfrac{418}{x} = 3$, $x \neq 3$; $418x - 418(x-3) = 3x(x-3)$; $3x^2 - 9x = 1254$; $x^2 - 3x - 418 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+1672}}{2} = \dfrac{3 \pm 41}{2}$; $x_1 = 22$, $x_2 = -19$, при этом x_2 не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 22.

C1. $\begin{cases} 2\sin^2 y + 9\cos y - 3\sin x = 0, \\ 2\cos^2 x - 5\sin x = 5. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы.
$2\cos^2 x - 5\sin x = 5;$
$2 - 2\sin^2 x - 5\sin x = 5;$
$2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0.$

Замена $\sin x = t$, $t \in [-1;1]$;
$2t^2 + 5t + 3 = 0;$
$t_1 = -1, \qquad t_2 = -1{,}5;$
$\sin x = -1, \qquad t_2 \notin [-1;1].$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Подставим найденное значение $\sin x = -1$ в первое уравнение системы и решим его.
$2\sin^2 y + 9\cos y + 3 = 0;$
$2 - 2\cos^2 y + 9\cos y + 3 = 0;$
$2\cos^2 y - 9\cos y - 5 = 0.$

Замена $\cos y = v$, $v \in [-1;1]$;
$2v^2 - 9v - 5 = 0;$
$v_1 = -0{,}5, \qquad v_2 = 5;$
$\cos y = -0{,}5, \qquad v_2 \notin [-1;1].$

$y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right); k, n \in Z.$

C2. Так как $DD_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ и $D_1C_1 \perp B_1C_1$, то $DC_1 \perp B_1C_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах). Поэтому искомый угол равен углу DC_1D_1 (см. рис. 100).

По условию $B_1D = \sqrt{21}$. Из $\triangle B_1DC_1$ по теореме Пифагора:
$DC_1^2 = B_1D^2 - B_1C_1^2 = 21 - 3^2 = 12.$
$DC_1 = 2\sqrt{3}.$

Из $\triangle DC_1D_1$: $\cos\angle DC_1D_1 = \frac{C_1D_1}{C_1D}$; $\cos\angle DC_1D_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\angle DC_1D_1 = \frac{\pi}{6}.$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

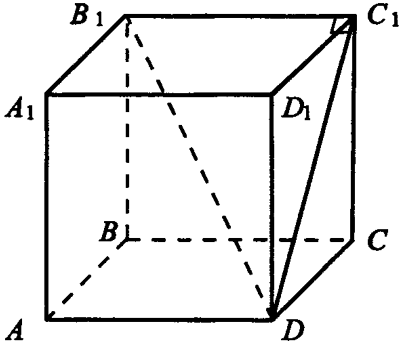


Рис. 100.

C3. $\begin{cases} \dfrac{1}{|(x-2)(x-3)|} + \dfrac{1}{|(x-3)(x-4)|} + \dfrac{1}{|(x-4)(x-5)|} \geqslant \dfrac{3}{40}, \\ |2x-7| \geqslant 3. \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq 2$; $x \neq 3$; $x \neq 4$; $x \neq 5$.

Решим второе неравенство системы.

$$|2x-7| \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-7 \geqslant 3, \\ 2x-7 \leqslant -3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geqslant 10, \\ 2x \leqslant 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$. Будем решать первое неравенство системы в этой области. Замечаем, что здесь выражения $x-2$, $x-3$, $x-4$, $x-5$ имеют одинаковый знак, поэтому первое неравенство системы можно записать в виде:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} \geqslant \frac{3}{40};$$

$$\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right) \geqslant \frac{3}{40};$$

$\dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-2} \geqslant \dfrac{3}{40}$. Так как $x-5$ и $x-2$ имеют одинаковый знак, то можно домножить обе части на $(x-2)(x-5) > 0$.

$$x - 2 - x + 5 \geqslant \frac{3}{40}(x-2)(x-5);$$

$$\frac{3}{40}(x-2)(x-5) \leqslant 3;$$

$$x^2 - 7x + 10 \leqslant 40;$$

$$x^2 - 7x - 30 \leqslant 0;$$

$$(x-10)(x+3) \leqslant 0;$$

$x \in [-3; 10]$. Так как решали в области $x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$, то
$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty), \\ x \in [-3; 10]. \end{cases}$$

Рис. 101.

Ответ: $[-3; 2) \cup (5; 10]$.

C4. Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 109 - 100 = 9$; $AH = 3$.

Из $\triangle CBH$ по теореме Пифагора: $CH^2 = BC^2 - BH^2 = 101 - 100 = 1$; $CH = 1$. $AC = AH + HC = 4$ (см. рис. 102).

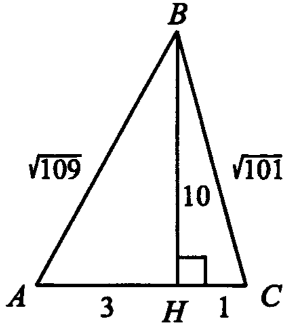


Рис. 102.

Возможны два случая расположения точки D.

1) D лежит на отрезке AC (см. рис. 103). Так как $AD : DC = 4 : 3$, то $AD = \frac{4}{7} AC = \frac{16}{7}$; $DC = \frac{3}{7} AC = \frac{12}{7}$. $DH = DC - HC = \frac{5}{7}$.

Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора:

$BD^2 = BH^2 + DH^2 = 100 + \frac{25}{49} = 25\left(4 + \frac{1}{49}\right) = 25 \cdot \frac{197}{49}$. $BD = \frac{5\sqrt{197}}{7}$.

Из $\triangle CBH$: $\sin \angle C = \frac{BH}{BC} = \frac{10}{\sqrt{101}}$.

По теореме синусов искомый радиус R выражается из $\triangle BCD$:

$2R = \frac{BD}{\sin \angle C}$; $R = \frac{5\sqrt{197}}{7 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{101}}{10} = \frac{\sqrt{19897}}{28}$.

2) D лежит вне отрезка AC (см. рис. 104). Так как $AD > DC$, то D

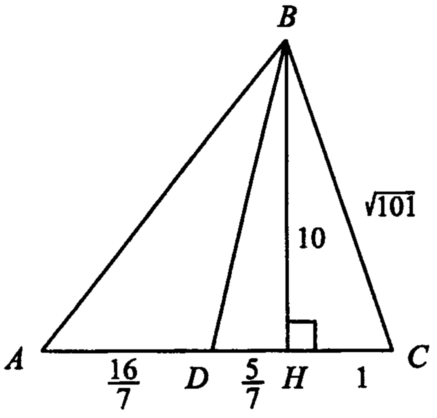


Рис. 103.

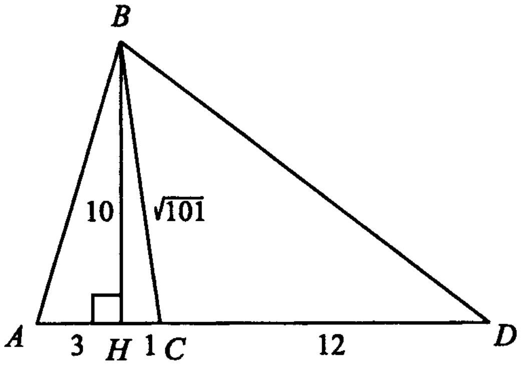


Рис. 104.

лежит на прямой AC за точкой C; $AD = AC + CD = \frac{4}{3}CD$. Отсюда, $CD = 3AC = 12$. $DH = HC + CD = 13$. Из $\triangle BDH$ по теореме Пифагора: $BD^2 = BH^2 + DH^2 = 10^2 + 13^2 = 269$. $BD = \sqrt{269}$.

Из $\triangle BDH$: $\sin\angle D = \frac{BH}{BD} = \frac{10}{\sqrt{269}}$.

Из $\triangle BCD$ по теореме синусов выражаем искомый радиус:
$2R = \frac{BC}{\sin\angle D}$; $R = \frac{\sqrt{101}\cdot\sqrt{269}}{2\cdot 10} = \frac{\sqrt{27169}}{20}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{19897}}{28}$ или $\frac{\sqrt{27169}}{20}$.

С5. $\dfrac{\log^2_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_{\frac{a+1}{108}} x^6 \cdot \log_a x + \log^2_a x}{(x-1)^2} \leqslant 0$

ОДЗ: $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ a \neq 107, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Знаменатель на ОДЗ положителен, поэтому числитель должен быть неположителен.

$\log^2_{\frac{a+1}{108}} x^3 + 2\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 \cdot \log_a x + \log^2_a x \leqslant 0;$

$(\log_{\frac{a+1}{108}} x^3 + \log_a x)^2 \leqslant 0;$

$3\log_{\frac{a+1}{108}} x + \log_a x = 0;$

$\log_{\frac{a+1}{108}} x = -\frac{1}{3}\log_a x;$

$\log_{\frac{a+1}{108}} x = \log_{\frac{1}{a^3}} x$. Так как $x \neq 1$, то $\dfrac{a+1}{108} = \dfrac{1}{a^3}$; $a+1 = \dfrac{108}{a^3}$; $a = 3$ является решением уравнения. При $a > 0$ имеем: $f(a) = a+1$ монотонно возрастает, $g(a) = \dfrac{108}{a^3}$ монотонно убывает. Следовательно, у уравнения $f(a) = g(a)$ не более одного решения.

Ответ: $a = 3$

С6. Из условия следует: $1000a + a + 4 = b^2 \Leftrightarrow 1001a = b^2 - 4$, $a, b \in N$, $100 \leqslant a \leqslant 999$. Отсюда $100104 \leqslant b^2 \leqslant 1000003$; $316 \leqslant b \leqslant 1000$. $1001a = b^2 - 4$; $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a = (b-2)(b+2)$. Числа $b-2$ и $b+2$ не могут одновременно делиться ни на какое натуральное $p > 4$, т.к. иначе $(b+2)-(b-2) \;\vdots\; p$; $4 \;\vdots\; p$, что невозможно.

Поэтому из $(b-2)(b+2) \;\vdots\; (7 \cdot 11 \cdot 13)$ получаем 8 случаев:

1) $b - 2 \;\vdots\; 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b - 2 \geqslant 1001 \Rightarrow b \geqslant 1003$. Противоречие с $b \leqslant 1000$.

2) $b - 2 \;\vdots\; 7 \cdot 11$, $b + 2 \;\vdots\; 13 \Rightarrow b = 77k + 2$, $k \in N$, $5 \leqslant k \leqslant 12$. $b + 2 = 77k + 4 \equiv -k + 4 \pmod{13}$; $-k + 4 \not\equiv 0 \pmod{13}$ при $5 \leqslant k \leqslant 12$.

Здесь нет допустимых значений k, при которых $b + 2 \;\vdots\; 13$.

3) $b - 2 \;\vdots\; 7 \cdot 13$, $b + 2 \;\vdots\; 11 \Rightarrow b = 91k + 2$, $k \in N$, $4 \leqslant k \leqslant 10$.

$b+2 = 91k+4 \equiv 3k+4 (\mathrm{mod}\ 11)$; $3k+4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$ при $k = 6$. Имеем: $b-2 = 91 \cdot 6$, $b+2 = 91 \cdot 6 + 4 = 550 = 11 \cdot 50$; $1001a = 91 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 50$; $a = 6 \cdot 50 = 300$.

4) $b-2 \ \vdots\ 7$, $b+2 \ \vdots\ 11 \cdot 13 \Rightarrow b = 143k - 2$, $k \in N$, $3 \leqslant k \leqslant 7$. $b-2 = 143k - 4 \equiv 3k - 4 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3k - 4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ при $k = 6$. Имеем: $b+2 = 143 \cdot 6$, $b-2 = 143 \cdot 6 - 4 = 854 = 122 \cdot 7$; $1001a = 143 \cdot 6 \cdot 122 \cdot 7$; $a = 6 \cdot 122 = 732$.

5) $b-2 \ \vdots\ 11$, $b+2 \ \vdots\ 7 \cdot 13 \Rightarrow b = 91k - 2$, $k \in N$, $4 \leqslant k \leqslant 11$. $b-2 = 91k - 4 \equiv 3k - 4 (\mathrm{mod}\ 11)$; $3k - 4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$ при $k = 5$. Имеем: $b+2 = 91 \cdot 5$, $b-2 = 91 \cdot 5 - 4 = 451 = 41 \cdot 11$; $1001a = 91 \cdot 5 \cdot 41 \cdot 11$; $a = 5 \cdot 41 = 205$.

6) $b-2 \ \vdots\ 11 \cdot 13$, $b+2 \ \vdots\ 7 \Rightarrow b = 143k + 2$, $k \in N$, $3 \leqslant k \leqslant 6$. $b+2 = 143k+4 \equiv 3k+4 (\mathrm{mod}\ 7)$; $3k+4 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ при $3 \leqslant k \leqslant 6$. Здесь нет допустимых значений k, при которых $b+2 \ \vdots\ 13$.

7) $b-2 \ \vdots\ 13$, $b+2 \ \vdots\ 7 \cdot 11 \Rightarrow b = 77k - 2$, $k \in N$, $5 \leqslant k \leqslant 13$. $b-2 = 77k - 4 \equiv -k - 4 (\mathrm{mod}\ 13)$; $-k - 4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13)$ при $k = 9$. Имеем: $b+2 = 77 \cdot 9$, $b-2 = 77 \cdot 9 - 4 = 689 = 53 \cdot 13$; $1001a = 77 \cdot 9 \cdot 53 \cdot 13$; $a = 9 \cdot 53 = 477$.

8) $b+2 \ \vdots\ 7 \cdot 11 \cdot 13 \Rightarrow b+2 \geqslant 1001 \Rightarrow b \geqslant 999$. Имеем $999 \leqslant b \leqslant 1000$ $\Rightarrow b+2 = 1001$. $b = 999$; $b-2 = 997$. $1001a = 1001 \cdot 997$; $a = 997$.

Ответ: 205, 300, 477, 732, 997.

Решение варианта №19

B1. Стаканчик жареных семечек стоит $5 \cdot 1{,}6 = 8$ рублей. Тогда на 100 рублей можно купить $100 : 8 = \frac{100}{8} = 12\frac{4}{8}$, то есть 12 стаканов.

Ответ: 12.

B2. По графику определяем: в течение 5 дней.

Ответ: 5.

B3. $\sqrt{\frac{11}{6-4x}} = \frac{1}{2}$; $\frac{11}{6-4x} = \frac{1}{4}$; $\frac{44}{6-4x} = 1$; $44 = 6 - 4x$; $-4x = 38$; $-\frac{38}{4} = -9{,}5$. Проверкой убеждаемся, что $x = -9{,}5$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $-9{,}5$.

B4. $AH = BH \cdot \operatorname{ctg} \angle BAH = 5 \cdot 1{,}4 = 7$ (см. рис. 105).

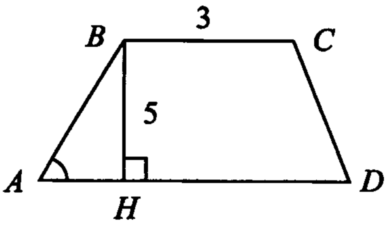


Рис. 105.

$AD = 2AH + BC = 14 + 3 = 17.$

Ответ: 17.

B5. Поездка на поезде стоит: $830 \cdot 4 = 3\,320$ (руб).

Поездка на машине стоит: $9 \cdot \dfrac{1\,600}{100} \cdot 21{,}3 = 9 \cdot 16 \cdot 21{,}3 = 3\,067{,}2$ (руб).

Ответ: 3 067,2.

B6. $S_{EKTL} = 11 \cdot 6 = 66$ (см. рис. 106); $S_{CDL} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$;

$S_{CKB} = \dfrac{3 \cdot 7}{2} = 10{,}5$; $S_{EBA} = \dfrac{4 \cdot 5}{2} = 10$; $S_{ATD} = \dfrac{1 \cdot 7}{2} = 3{,}5$.

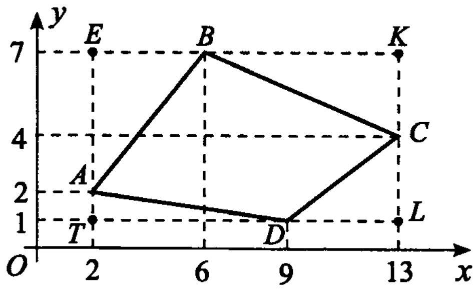


Рис. 106.

$S_{ABCD} = S_{EKTL} - S_{CDL} - S_{CKD} - S_{EBA} - S_{ATD} =$
$= 66 - 6 - 10{,}5 - 10 - 3{,}5 = 36.$

Ответ: 36.

B7. $5^9 \cdot 6^{12} : 30^9 = \dfrac{5^9 \cdot 2^{12} \cdot 3^{12}}{5^9 \cdot 2^9 \cdot 3^9} = 2^3 \cdot 3^3 = 6^3 = 216.$

Ответ: 216.

B8. Так как $f'(x) < 0$ при $x \in [-4; 1]$, то $f(x)$ убывает на $[-4; 1]$ и принимает наибольшее значение в точке начала отрезка, то есть в точке $x = -4$.

Ответ: -4.

B9. Так как диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, то сторона ромба равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см. рис. 107). Тогда $S_{\text{бок. п.}} = 13 \cdot 4 \cdot 20 = 1040$.

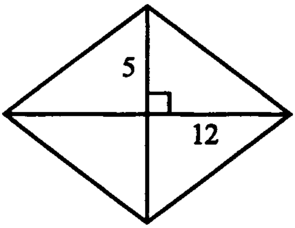


Рис. 107.

Ответ: 1040.

B10. Из условия следует неравенство $F_A \leqslant 588\,000$.

Тогда $100 \cdot 9{,}8 \cdot 3 \cdot R^2 \cdot 5 \leqslant 588\,000$; $15R^2 \leqslant 60$; $R^2 \leqslant 4$. Следовательно, максимальный радиус $R = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: 2.

B11. $y' = \dfrac{6}{\cos^2 x} - 2$. Так как $\dfrac{6}{\cos^2 x} \geqslant 6$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; 0\right]$. Значит, её наибольшее значение равно $y(0) = 6 \cdot \operatorname{tg} 0 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

B12. Пусть x — скорость первого теплохода, тогда $(x + 2)$ — скорость второго. Так как они прибыли одновременно, то $\dfrac{255}{x} = \dfrac{255}{x+2} + 2$. Тогда

$\dfrac{255x + 2x^2 + 4x - 255x - 510}{x(x+2)} = 0$; $x^2 + 2x - 255 = 0$; $x_1 = 15, x_2 = -17$.

Так как $x_2 < 0$, то $x = 15$.

Ответ: 15.

C1. $\begin{cases} \dfrac{2x + 5y}{2y} + \dfrac{y - 2x}{x} = 2{,}5, \\ x|y| + x^2 + y^2 = 1 + 2x; \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.

Из первого уравнения выразим y через x. Получим:

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4xy = 5xy,$
$(x - y)^2 = 0,$
$x = y.$
Подставим $y = x$ во второе уравнение. Получим:
$x|x| + x^2 + x^2 = 1 + 2x.$

1. $x > 0$: $x^2 + x^2 + x^2 = 1 + 2x,$
   $$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$$
   $x = -\dfrac{1}{3}$ — не удовлетворяет условию $x > 0$.

2. $x < 0$: $-x^2 + x^2 + x^2 = 1 + 2x,$
   $$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2}, \\ x = 1 - \sqrt{2}; \end{array}\right.$$
   $x = 1 + \sqrt{2}$ — не удовлетворяет условию $x < 0$.

Имеем: $(1; 1)$ и $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ — решения исходной системы.

Ответ: $(1; 1), (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

C2. $S_{\text{пов}} = 4BC \cdot CC_1$ (см. рис. 108).

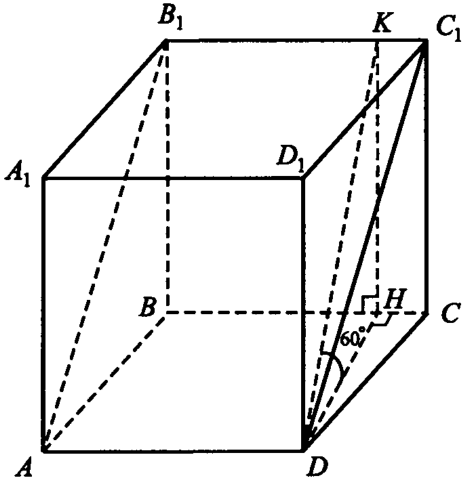


Рис. 108.

$$S_{ABCD} = S_{ABC_1D_1} \cdot \cos\angle HDK = 5\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABCD} = BC \cdot DH,\ BC = \frac{S_{ABCD}}{DH} = \frac{5\sqrt{3}}{2DH}.$$

$$\operatorname{tg}\angle HDK = \frac{KH}{DH},\ KH = DH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = DH\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{пов}} = \frac{4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot DH \cdot \sqrt{3}}{2DH} = 30.$$

Ответ: 30.

С3. $$\begin{cases} \dfrac{|3x+175|(x-22)(5-x)}{\sqrt[4]{17x-x^2-42}} \geqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{11-x} \cdot \sqrt[6]{(11-x)^3}}{|11-x|} \geqslant 0. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 17x - x^2 - 42 > 0, \\ 11 - x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 42 < 0, \\ x < 11; \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 11.$

Решим систему на ОДЗ.

$|3x+175| = 3x + 175,\ |11-x| = 11 - x.$

Заметим, что второе неравенство выполняется при всех значениях x из промежутка $(3; 11)$.

Учитывая, что $\sqrt[4]{17x - x^2 - 42} > 0$, система равносильна системе неравенств:

$$\begin{cases} (3x+175)(x-22)(5-x) \geqslant 0, \\ x > 3, \\ x < 11; \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leqslant x < 11.$$

Ответ: $[5; 11)$.

С4. Пусть x — радиус окружности, в которую вписан равносторонний треугольник. Могут представиться два случая расположения окружности.

1. Проведем $O_2F \parallel AB$ и $DE \parallel AB$ (см. рис. 109), ABO_2F и $ABED$ — прямоугольники. Из прямоугольного треугольника O_2FO_1 находим

$O_2F = \sqrt{O_1O_2^2 - (O_1A - O_2B)^2} = \sqrt{45^2 - 27^2} = 36,$

$AB = O_2F = 36.$

Из прямоугольных треугольников O_1DO_3 и O_2EO_3 имеем:

$DO_3 = \sqrt{(36+x)^2 - (36-x)^2} = 12\sqrt{x},$

$EO_3 = \sqrt{(9+x)^2 - (9-x)^2} = 6\sqrt{x}.$

$DE = DO_3 + EO_3 = 18\sqrt{x},\ DE = AB = 36,\ 18\sqrt{x} = 36,\ x = 4.$

Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$, а площадь

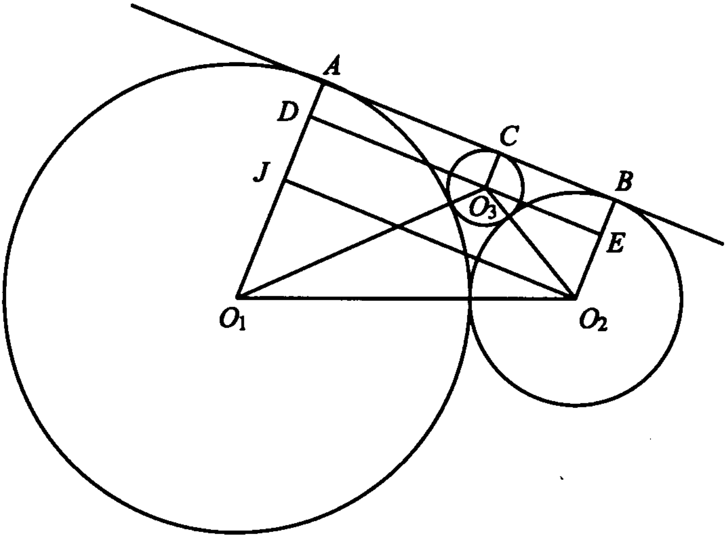


Рис. 109.

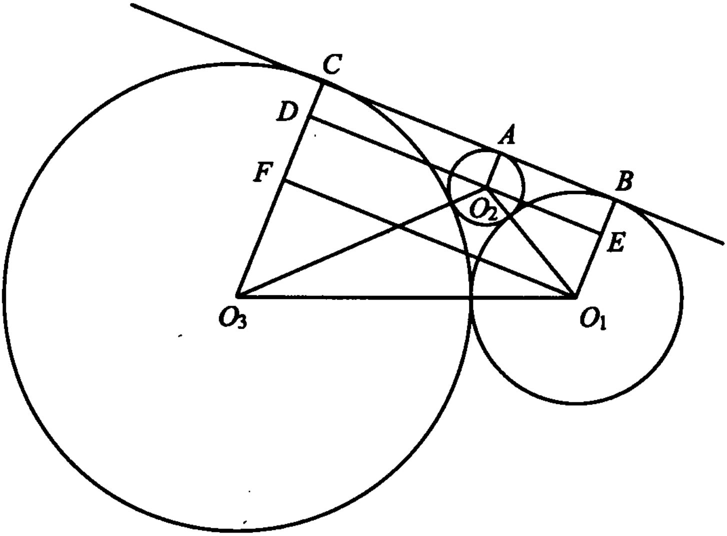


Рис. 110.

$$S = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

2. Проведем $O_1F \parallel BC$ и $DE \parallel BC$ (см. рис. 110), тогда CBO_1F и

$CBED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_1FO_3 и O_2DO_3 имеем:
$O_1F = \sqrt{O_3O_1^2 - O_3F^2} = \sqrt{(x+36)^2 - (x-36)^2} = 12\sqrt{x}$,
$BC = O_1F = 12\sqrt{x}$.
$O_2D = \sqrt{(x+9)^2 - (x-9)^2} = 6\sqrt{x}$.
$DE = DO_2 + EO_2 = 6\sqrt{x} + 36$, $6\sqrt{x} + 36 = 12\sqrt{x}$, $x = 36$.
Сторона правильного треугольника равна $36\sqrt{3}$, а площадь
$$S = \frac{(36\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 972\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ или $972\sqrt{3}$.

С5. $\dfrac{1+4x-\sqrt{6x+15x^2}}{1+4x+\sqrt{6x+15x^2}} = 8a^3\dfrac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}$.

ОДЗ: $x \geqslant 0$.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2, получим:
$$\frac{(\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x})^2}{(\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x})^2} = 8a^3\frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}.$$
Учитывая, что на ОДЗ $\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x} > 0$ и $\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x} > 0$, получаем $a > 0$.

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}}$, получим:
$$\frac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{3x}} = 2a.$$
$\sqrt{2+5x} - \sqrt{3x} = 2a(\sqrt{2+5x} + \sqrt{3x})$,
$2a\sqrt{2+5x} - \sqrt{2+5x} + 2a\sqrt{3x} + \sqrt{3x} = 0$,
$\sqrt{2+5x}(2a-1) + \sqrt{3x}(2a+1) = 0$,
$\sqrt{2+5x}(1-2a) = \sqrt{3x}(2a+1)$. Так как $a > 0$, то $2a+1 > 0$, значит, $1 - 2a \geqslant 0$. Тогда $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$x(4a^2 - 16a + 1) = -(1-2a)^2$,
$x(16a - 4a^2 - 1) = (1-2a)^2$,
Так как $x \geqslant 0$, то $16a - 4a^2 - 1 \geqslant 0$. Но для того, чтобы это уравнение имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $16a - 4a^2 - 1 > 0$.
$4a^2 - 16a + 1 < 0$; $2 - \dfrac{\sqrt{15}}{2} < a < 2 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

С учетом условия $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$ получаем при $2 - \dfrac{\sqrt{15}}{2} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$,

$x = \dfrac{(1-2a)^2}{16a - 4a^2 - 1}$.

Ответ: $x = \dfrac{(1-2a)^2}{16a-4a^2-1}$ при $2 - \dfrac{\sqrt{15}}{2} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

С6. Пусть прогрессия возрастает (то есть её разность $d > 0$) и её члены равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Обозначим $S(x) = |a_1 - x| + |a_2 - x| + \ldots + |a_n - x|$. По условию $S(0) = S(1) = S(2) = 175$.

Легко видеть, что

$$S(x) = \begin{cases} -nx + c_0, x \leqslant a_1, \\ (2i-n)x + c_i, a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ nx + c_n, x \geqslant a_n; \end{cases}$$

где $c_i, i = 0, 1, \ldots, n$ — некоторые константы.

Пусть $n = 2k+1$ (нечётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leqslant a_{k+1}$ и возрастает при $x \geqslant a_{k+1}$, так что не может принимать равные значения в трех точках.

Пусть $n = 2k$ (чётно), тогда $S(x)$ убывает при $x \leqslant a_k$, постоянна на $[a_k; a_{k+1}]$, возрастает при $x \geqslant a_{k+1}$. Отсюда $S\left(a_k + \dfrac{d}{2}\right) = 175$.

Имеем: $a_k - a_i = (k-i)d$;

$$S\left(a_k + \frac{d}{2}\right) = \left|-(k-1)d - \frac{d}{2}\right| + \left|-(k-2)d - \frac{d}{2}\right| + \ldots + \left|-\frac{d}{2}\right| + \left|\frac{d}{2}\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|(k-1)d + \frac{d}{2}\right| = |d|((2k-1) + (2k-3) + \ldots + 1) = k^2 d = \frac{n^2 d}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{n^2 d}{4} = 175;\ \frac{n^2 d}{100} = \frac{1}{25} \cdot \frac{n^2 d}{4} = \frac{175}{25} = 7.$$

Аналогичные рассуждения для убывающей прогрессии приводят к результату $\dfrac{n^2 d}{100} = -7$.

Ответ: $-7; 7$.

Решение варианта №20

В1. Стоимость пирожного у поставщика $21 : 1{,}4 = 15$ рублей. Так как $70 : 15 = 4\frac{2}{3}$, то у поставщика можно купить 4 пирожных.

Ответ: 4.

В2. По графику определяем, что посев репы можно проводить в течение

6 дней.

Ответ: 6.

B3. $-x = \sqrt{15-2x}$; $x^2 = 15 - 2x$; $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 3$. Проверка показывает, что $x = -5$ — корень исходного уравнения.

Ответ: -5.

B4. По условию $AD = 27$; $AB = 25$; $\sin\angle A = 0{,}96$ (см. рис. 111). Тогда $\cos\angle A = \sqrt{1-\sin^2\angle A} = \sqrt{1-0{,}9216} = 0{,}28$. $AH = AB\cdot\cos\angle A = 7$; $BC = AD - 2AH = 27 - 14 = 13$.

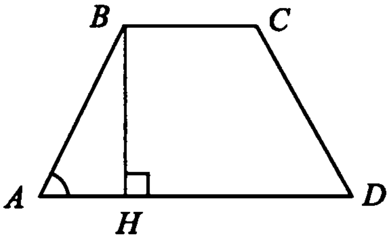


Рис. 111.

Ответ: 13.

B5. На поезде общая стоимость составит: $740\cdot 4 = 2\,960$ (руб).

А на машине: $11\cdot\dfrac{1100}{100}\cdot 17{,}2 = 121\cdot 17{,}2 = 2\,081{,}2$ (руб).

Ответ: 2 081,2.

B6. $S_{BTC} = \dfrac{3\cdot 4}{2} = 6$; $S_{AKB} = \dfrac{6\cdot 3}{2} = 9$; $S_{AED} = \dfrac{2\cdot 10}{2} = 10$; $S_{EKTD} = 10\cdot 5 = 50$ (см. рис. 112).

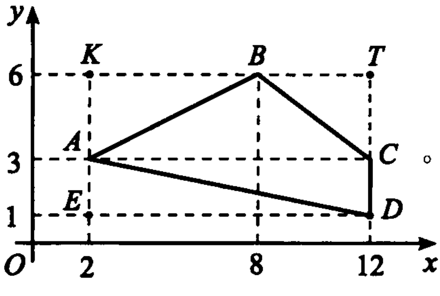


Рис. 112.

$S_{ABCD} = S_{EKTD} - S_{BTC} - S_{AKB} - S_{AED} =$

$= 50 - 6 - 9 - 10 = 25.$

Ответ: 25.

B7. $\log_4 25{,}6 + \log_4 10 = \log_4 256 = 4.$

Ответ: 4.

B8. Точек максимума здесь две, так как график производной 3 раза меняет знак на интервале $(-6; 5)$, из которых 2 раза с плюса на минус. Это и есть точки максимума.

Ответ: 2.

B9. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 3V_{A_1BC_1D} = 3 \cdot 3 = 9.$

Ответ: 9.

B10. Из условия следует неравенство $S \geqslant 42$.

$20t - 2t^2 \geqslant 42$; $2t^2 - 10t + 21 \leqslant 0$; $3 \leqslant t \leqslant 7$. Наименьшее время $t = 3$.

Ответ: 3.

B11. $y' = \dfrac{7}{\cos^2 x} - 2$. Так как $\dfrac{7}{\cos^2 x} \geqslant 7$, то $y' > 0$. Следовательно, функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение $y(x)$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ равно $y(0) = 7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$.

Ответ: 5.

B12. Пусть второй рабочий делает x деталей в час, тогда первый делает $(x - 2)$ детали в час. Так как первый рабочий выполняет заказ на 2 часа медленнее, то получим уравнение: $\dfrac{99}{x-2} = \dfrac{99}{x} + 2$; $x_1 = -9, x_2 = 11$. Так как $x > 0$,то $x = 11$.

Ответ: 11.

C1. $\begin{cases} \dfrac{3x - y}{y} + \dfrac{3y + 4x}{x} = -3, \\ x|y| + x^2 - y^2 - 3 = 2x; \end{cases}$

ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.

Из первого уравнения системы выразим x через y. Получим:

$3x^2 - xy + 3y^2 + 4xy = -3xy,$

$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 0,$

$(x + y)^2 = 0,$

$x = -y.$

Подставим $x = -y$ во второе уравнение системы. Получим:

$-y|y| + y^2 - y^2 - 3 = -2y,$

$-y|y| + 2y - 3 = 0.$

1. $y > 0$: $y^2 - 2y + 3 = 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

2. $y < 0$: $y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -3; \end{array} \right.$

$y = 1$ — не удовлетворяет условию $y < 0$.

Итак, $(3; -3)$ — решение исходной системы.

Ответ: $(3; -3)$.

C2. $V = S_{ABCD} \cdot BB_1$ (см. рис. 113). В прямоугольном треугольнике B_1AD согласно условию $\angle DB_1A = 30°$, следовательно, $AD = \frac{1}{2}DB_1$, $DB_1 = 6\sqrt{2}$. Тогда из прямоугольного треугольника BB_1D находим $BB_1 = \sqrt{DB_1^2 - BD^2} = 6$ ($BD = 6$ как диагональ квадрата).

Значит, $V = (3\sqrt{2})^2 \cdot 6 = 108$.

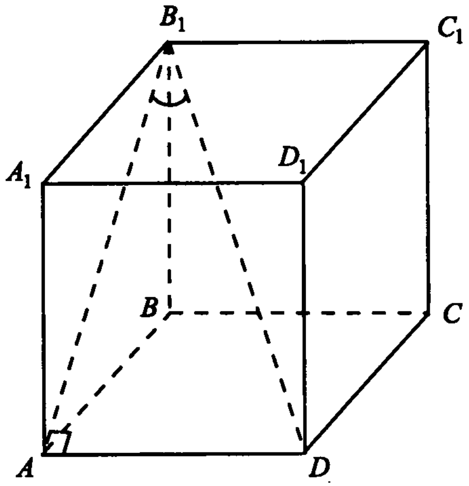


Рис. 113.

Ответ: 108.

C3. $\begin{cases} \dfrac{|7x - 123|(x + 15)(x - 8)}{-\sqrt[4]{x^2 + 3x - 28}} \geqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{x + 9}\sqrt[6]{(x + 9)^3}}{|x + 9|} \geqslant 0. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 3x - 28 > 0, \\ x + 9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -7, \\ x > 4, \end{array} \right. \\ x > -9; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-9; -7) \cup (4; +\infty)$.

Решим систему на ОДЗ. Заметим, что второе неравенство выполняется при всех значениях, принадлежащих ОДЗ.

Учитывая, что $-\sqrt[4]{x^2+3x-28} < 0$, система равносильна системе неравенств:

$$\begin{cases} |7x-123|(x+15)(x-8) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -9, \\ x < -7, \end{cases} \\ x > 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1)\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -9, \\ x < -7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant 17\frac{4}{7}, \end{cases} \end{array}\right. \\ (123-7x)(x+15)(x-8) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -9, \\ x < -7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} x > 17\frac{4}{7}, \\ (7x-123)(x+15)(x-8) \leqslant 0; \end{cases} \text{— решений нет.}$$

Ответ: $(-9;-7) \cup (4;8]$.

C4. Пусть x — радиус окружности, в которую вписан равносторонний треугольник. Могут представиться два случая расположения окружности.

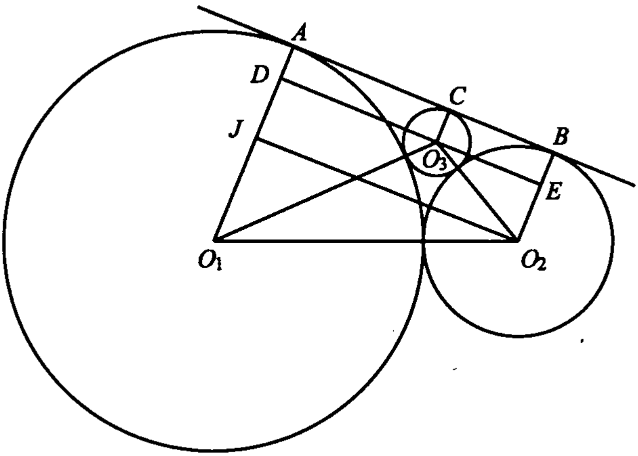


Рис. 114.

1. Проведём $O_2F \parallel AB$ и $DE \parallel AB$ (см. рис. 114), тогда ABO_2F и $ABED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_2FO_1,

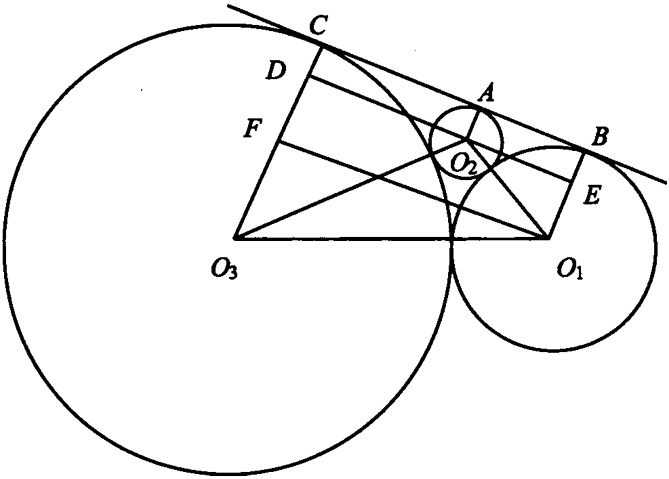


Рис. 115.

O_1DO_3 и O_2EO_3 имеем:
$FO_2 = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96$, $DO_3 = \sqrt{(144+x)^2 - (144-x)^2} = 24\sqrt{x}$.
$EO_3 = \sqrt{(16+x)^2 + (16-x)^2} = 8\sqrt{x}$,
$DE = DO_3 + EO_3 = 32\sqrt{x}$, $DE = FO_2 = 96$.
$32\sqrt{x} = 96$, $x = 9$.
Сторона правильного треугольника равна $9\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(9\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 60{,}75\sqrt{3}.$$

2. Проведём $O_1F \parallel BC$ и $DE \parallel BC$ (см. рис. 115), тогда CBO_1F и $CBED$ — прямоугольники. Из прямоугольных треугольников O_1FO_3, O_2DO_3 и O_1O_2E имеем:
$O_1F = \sqrt{(x+144)^2 - (x-144)^2} = 24\sqrt{x}$,
$O_2D = \sqrt{(x+16)^2 - (x-16)^2} = 8\sqrt{x}$, $EO_2 = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96$;
$DE = DO_2 + EO_2 = 8\sqrt{x} + 96$; $8\sqrt{x} + 96 = 24\sqrt{x}$; $16\sqrt{x} = 96$, $x = 36$.
Сторона правильного треугольника равна $36\sqrt{3}$, а площадь

$$S = \frac{(36\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 972\sqrt{3}.$$

Ответ: $60{,}75\sqrt{3}$ или $972\sqrt{3}$.

С5. $\dfrac{1+5x-\sqrt{10x+25x^2}}{1+5x+\sqrt{10x+25x^2}} = \dfrac{1}{8}c^3\dfrac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}.$

ОДЗ: $x \geqslant 0$.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2 и преобразуем её:

$$\frac{(\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x})^2}{(\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x})^2}=\frac{1}{8}c^3\frac{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}.$$

Учитывая, что на ОДЗ $\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}>0$ и $\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}>0$, получаем $c>0$.

Умножим обе части равенства на $\dfrac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}$, получим:

$$\frac{\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x}}{\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x}}=\frac{1}{2}c.$$

$2(\sqrt{2+5x}-\sqrt{5x})=c(\sqrt{2+5x}+\sqrt{5x})$,

$\sqrt{2+5x}(c-2)+\sqrt{5x}(c+2)=0$,

$\sqrt{2+5x}(2-c)=\sqrt{5x}(2+c)$, так как $c>0$, то $c+2>0$, значит, $2-c\geqslant 0$. Тогда $0<c\leqslant 2$.

$20cx=(2-c)^2$. Учитывая, что $c\in(0;2]$, имеем $x=\dfrac{(2-c)^2}{20c}$ при $0<c\leqslant 2$.

Ответ: $x=\dfrac{(2-c)^2}{20c}$ при $0<c\leqslant 2$.

С6. Пусть прогрессия возрастает (то есть её разность $d>0$), и её члены равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Обозначим $S(x)=|a_1-x|+|a_2-x|+\ldots+|a_n-x|$.

По условию $S(0)=S(1)=S(2)=325$.

Легко видеть, что

$$S(x)=\begin{cases}-nx+c_0, x\leqslant a,\\(2i-n)x+c_i, a_i\leqslant x\leqslant a_{i+1}, 1\leqslant i\leqslant n-1,\\nx+c_n, x\geqslant a_n;\end{cases}$$

где $c_i, i=0,1,\ldots,n$ — некоторые константы.

Пусть $n=2k+1$ (нечётно), тогда $S(x)$ убывает при $x\leqslant a_{k+1}$ и возрастает при $x\geqslant a_{k+1}$, так что не может принимать равные значения в трех точках.

Пусть $n=2k$ (чётно), тогда $S(x)$ убывает при $x\leqslant a_k$, постоянна на $[a_k; a_{k+1}]$, возрастает при $x\geqslant a_{k+1}$. Отсюда $S\left(a_k+\dfrac{d}{2}\right)=325$.

Имеем: $a_k-a_i=(k-i)d$;

$$S\left(a_k+\frac{d}{2}\right)=\left|-(k-1)d-\frac{d}{2}\right|+\left|-(k-2)d-\frac{d}{2}\right|+\ldots+\left|-\frac{d}{2}\right|+\left|\frac{d}{2}\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|(k-1)d+\frac{d}{2}\right|=|d|((2k-1)+(2k-3)+\ldots+1)=k^2d=\frac{n^2d}{4}.$$

Следовательно, $\dfrac{n^2d}{4}=325$; $\dfrac{n^2d}{100}=\dfrac{1}{25}\cdot\dfrac{n^2d}{4}=\dfrac{325}{25}=13$.

Аналогичные рассуждения для убывающей прогрессии приводят к результату $\frac{n^2d}{100} = -13$.

Ответ: -13; 13.

Решение варианта №21

B1. На две недели потребуется $17 \cdot 14 = 238$ пакетиков, то есть $238 : 25 = 9{,}52$ упаковок. Необходимо купить 10 упаковок чая.

Ответ: 10.

B2. На оси «Дни» в период с 14 по 19 февраля находим день, в который наблюдалось наибольшее давление — 18 февраля; ему соответствует по оси «Давление» число 756.

Ответ: 756.

B3. $\frac{3}{7}x = -6\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}$, $x = -15$.

Ответ: -15.

B4. $\sin\angle ACD = \frac{AD}{AC}$ (см. рис. 116).

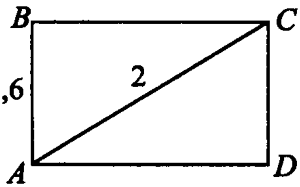


Рис. 116.

По теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 - CD^2$,

откуда $AD = 1{,}2$ и $\sin\angle ACD = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

B5. А: $8 \cdot 20 \cdot 12 + 2\,500 \cdot 2 = 6\,920$.

Б: $9{,}5 \cdot 23 \cdot 12 + 2\,350 \cdot 2 = 7\,322$.

В: $15 \cdot 13 \cdot 12 + 2\,300 \cdot 2 = 6\,940$.

Ответ: 6 920.

B6. Сторона квадрата равна $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{5}$ (см. рис. 117), тогда его площадь равна $(2\sqrt{5})^2 = 20$.

Ответ: 20.

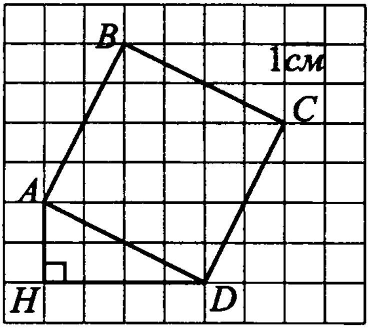


Рис. 117.

B7. $\dfrac{b^{4,44}}{b^{3,11}\cdot b^{3,33}}=\dfrac{b^{4,44}}{b^{6,44}}=\dfrac{1}{b^2}$, $\dfrac{6^2}{(\sqrt{5})^2}=36:5=7{,}2.$

Ответ: 7,2.

B8. Дифференцируемая функция убывает на промежутке в тех точках, в которых производная меньше либо равна нуля за исключением, быть может, конечного множества точек в которых производная равна нулю. Из графика следует, что $y' < 0$ в следующих целых точках: -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Сумма этих целых точек равна $-5-4-3-2-1+1+2+3=-9$.

Ответ: -9.

B9. Пусть a — сторона основания призмы, h — ее высота.

$$S_{\text{пов}}=2S_{\text{осн}}+4S_{\text{бок гр}}=2a^2+4\cdot a\cdot h=2a^2+4ah=$$
$$=2\cdot 100+4\cdot 10\cdot 6=200+240=440.$$

Ответ: 440.

B10. $S\leqslant 8,\ \ v_0t+\dfrac{at^2}{2}\leqslant 8,\ \ 28t+\dfrac{32t^2}{2}\leqslant 8,\ \ 16t^2+28t-8\leqslant 0,$

$4t^2+7t-2\leqslant 0,\ \ -2\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{4}.$

Так как по смыслу задачи $t\geqslant 0$, то $t\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$. Следовательно, мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи 15 минут.

Ответ: 15.

B11. $y = (x+4)\cdot e^{x-4}$.
$y' = (x+4)'\cdot e^{x-4} + (x+4)\cdot\left(e^{x-4}\right)' = e^{x-4} + (x+4)\cdot e^{x-4} = e^{x-4}\cdot(x+5)$.
$y' = 0,\ x+5 = 0,\ x = -5$.

В точке $x = -5$ производная исходной функции обращается в ноль и при переходе через нее меняет знак с минуса на плюс, значит, $x = -5$ — точка минимума исходной функции.

Ответ: -5.

B12. Пусть x деталей в час делает второй рабочий, тогда первый рабочий делает $(x+2)$ детали в час. По условию заказ на 360 деталей, следовательно, время работы второго рабочего составляет $\dfrac{360}{x}$ ч, а первого — $\dfrac{360}{x+2}$ ч. Составим уравнение:

$\dfrac{360}{x+2} = \dfrac{360}{x} - 2$; $360x = 360x + 720 - 2x^2 - 4x$; $2x^2 + 4x - 720 = 0$;
$x^2 + 2x - 360 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+360}$; $x_1 = 18$, $x_2 = -20$.

По смыслу задачи $x > 0$, значит, $x = 18$.

Ответ: 18.

C1. $\begin{cases} (x+2)^2 + \sqrt{x^2+4x+19} = 57, \\ y^2 = x - 1. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $x \geqslant 1$.

Решим первое уравнение системы.
$x^2 + 4x + 4 + \sqrt{x^2+4x+19} = 57$;
$x^2 + 4x + 19 + \sqrt{x^2+4x+19} - 72 = 0$.

Замена $\sqrt{x^2+4x+19} = t,\ t \geqslant 0$.
$t^2 + t - 72 = 0$, отсюда
$t_1 = 8, \quad t_2 = -9 < 0$.
$\sqrt{x^2+4x+19} = 8$,
$x^2 + 4x + 19 = 64$,
$x^2 + 4x - 45 = 0$,
$x_1 = 5, \quad x_2 = -9$,
x_2 не удовлетворяет условию $x \geqslant 1$.
$y^2 = 5 - 1$,
$y = \pm 2$.

Ответ: $(5; -2)$, $(5; 2)$.

C2. Примем длину стороны основания пирамиды за единицу. Тогда $AB = BC = AC = DH = 1$.

Опустим из точки K перпендикуляр KM на ABC. Так как отрезок AH

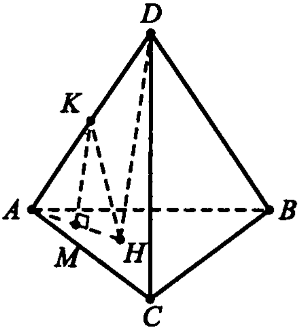


Рис. 118.

является проекцией отрезка AD на ABC, то $M \in AH$. Отсюда $\angle KHA$ — искомый. AH — радиус описанной около правильного треугольника ABC окружности, то $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

KM — средняя линия ΔHAD (так как $AK = KD$ и $KM \parallel DH$ ввиду $KM \perp ABC$ и $DH \perp ABC$). Отсюда $KM = \frac{DH}{2} = \frac{1}{2}$;

$MH = \frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

$\operatorname{tg} \angle KHM = \frac{KM}{MH} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, значит, $\angle KHM = 60°$.

Ответ: 60°.

С3. $3^{2x} - 2^{x+\frac{3}{2}} \geqslant 2^{x+\frac{5}{2}} + 9^{x-1}$, $3^{2x} - 9^{x-1} \geqslant 2^{x+\frac{3}{2}} + 2^{x+\frac{5}{2}}$,

$9^x\left(1 - \frac{1}{9}\right) \geqslant 2^x(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$, $9^x \cdot \frac{8}{9} \geqslant 2^x \cdot 6\sqrt{2}$, $\frac{9^x}{2^x} \geqslant \frac{9 \cdot 6\sqrt{2}}{8}$,

$\frac{9^x}{2^x} \geqslant \frac{27}{2\sqrt{2}}$, $\left(\frac{9}{2}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{2}\right)^{1,5}$, $x \geqslant 1{,}5$.

Ответ: $[1{,}5; +\infty)$.

С4. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A, осями Ox и Oy, проходящими через точки B и D соответственно (см. рис. 119). Тогда $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;1)$, $D(0;1)$.

Пусть $K(x;0)$. Тогда $\overrightarrow{KA} = (-x;0)$, $\overrightarrow{KD} = (-x;1)$, $\overrightarrow{KC} = (2-x;1)$. По условию $\angle AKD = \angle CKD$, что равносильно равенству $\cos\angle AKD = \cos\angle CKD$. Выражая косинусы через скалярные произведения, получаем:

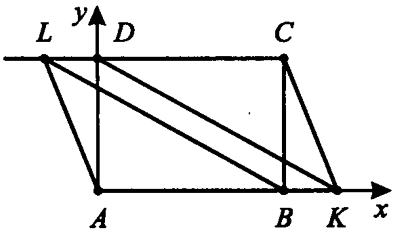


Рис. 119.

$$\frac{x^2}{|x|\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{-x(2-x)+1}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(2-x)^2+1}},$$

$$|x|=\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-4x+5}},$$

$$|x|\sqrt{x^2-4x+5}=x^2-2x+1.$$

Учитывая, что $|x|\geqslant 0$ и $x^2-2x+1\geqslant 0$, получаем

$$x^2(x^2-4x+5)=x^4+4x^2+1-4x^3+2x^2-4x,$$

$$x^2-4x+1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Получили: $AK=2\pm\sqrt{3}$. Аналогично $CL=2\pm\sqrt{3}$.

При $AK=CL$ имеем: $AKCL$ — параллелограмм,

$S_{AKCL}=AK\cdot AD=2\pm\sqrt{3}$.

При $AK\neq CL$ имеем: $AKCL$ — трапеция,

$$S_{AKCL}=\frac{1}{2}(AK+CL)\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})=2.$$

Ответ: $2-\sqrt{3}$; 2; $2+\sqrt{3}$.

C5. Пусть данные уравнения имеют два общих корня x_1 и x_2. Найдем значения параметров a и b.

Рассмотрим первое уравнение.

$$2x^2-ax-8=0,\ x^2-\frac{a}{2}x-4=0.$$

Так как числа x_1 и x_2 являются его корнями, то по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a}{2},\\ x_1x_2=-4.\end{cases}$$

Второе уравнение $x^3+bx-16=0$ имеет корни x_1 и x_2 и третий корень x_3. Иными словами, при любом значении x выполняется

$x^3+bx-16=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$

$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \cdot x - x_1x_2x_3 =$
$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_3 \cdot (x_1 + x_2)) \cdot x - x_1x_2x_3.$

Подставив вместо $x_1 + x_2$ значение $\frac{a}{2}$, а вместо x_1x_2 — -4, получим

$$x^3 + bx - 16 = x^3 - \left(\frac{a}{2} + x_3\right) \cdot x^2 + \left(-4 + \frac{a}{2}x_3\right)x + 4x_3.$$

Так как полученное равенство выполняется при любых значениях x, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + x_3 = 0, \\ -4 + \frac{a}{2}x_3 = b, \\ 4x_3 = -16; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 8, \\ b = -20, \\ x_3 = -4. \end{cases}$$

Подставив значение $a = 8$ в первое уравнение, получим $x^2 - 4x - 4 = 0$. Корни этого уравнения равны $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a = 8, b = -20, x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

C6. Заметим, что если пара (x, y) является решением исходного уравнения, то пара $(x, -y)$ также является его решением, поэтому будем рассматривать только значения $y \geqslant 0$.

Рассмотрим два случая.

1) x — чётно, то есть $x = 2n$, $n \in N$. В этом случае имеем $4 \cdot 3^{2n} - y^2 = 35$, $(2 \cdot 3^n - y)(2 \cdot 3^n + y) = 35$.

Так как каждый множитель является целым числом и выражение $2 \cdot 3^n + y$ принимает только положительные значения, то последнее уравнение равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \cdot 3^n - y = 5, \\ 2 \cdot 3^n + y = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \cdot 3^n - y = 1, \\ 2 \cdot 3^n + y = 35; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 \cdot 3^n = 12, \\ 2y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 4 \cdot 3^n = 36, \\ 2y = 34; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} n = 2, \\ y = 17. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, в данном случае получаем решения исходного уравнения $(2; 1), (2; -1), (4; 17), (4; -17)$.

2) x — нечётно, то есть $x = 2n + 1$, $n \in N$. В этом случае $4 \cdot 3^x$ делится на 3 нацело, y^2 при делении на 3 дает остатки 1 или 0 (как квадрат целого числа), а число 35 делится на 3 с остатком 2. Таким образом, в данном случае уравнение $4 \cdot 3^x - y^2 = 35$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: $(2; 1), (2; -1), (4; 17), (4; -17)$.

Решение варианта №22

B1. За 7 занятий без абонемента Саша заплатила бы $320 \cdot 7 = 2240$, значит, она сэкономила $2240 - 1870 = 370$ рублей.

Ответ: 370.

B2. По рисунку по оси «Т» определяем наибольшую температуру в период с 12 по 15 февраля. Наибольшая температура равна $5°C$, она была достигнута 14 февраля.

Ответ: 5.

B3. $\dfrac{1-2x}{x+13} = -3.$

ОДЗ. $x \neq -13$.

$1 - 2x = -3(x+13)$, $1 - 2x + 3x + 39 = 0$, $x + 40 = 0$, $x = -40$.

Ответ: -40.

B4. $\angle A = \angle C$ (см. рис. 120), $\cos\angle B = \cos(180 - \angle C) = -\cos\angle C =$

$= -\sqrt{1 - \sin^2\angle C} = -\sqrt{1 - \dfrac{15}{64}} = -\dfrac{7}{8}$; $\cos B = -0{,}875$.

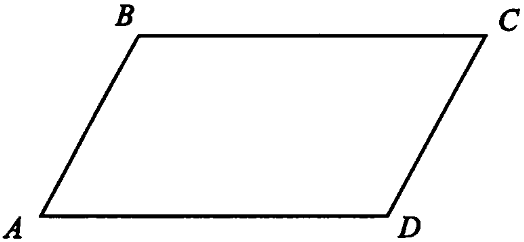


Рис. 120.

Ответ: $-0{,}875$.

B5. А: $6{,}5 \cdot 15 \cdot 16 + 3\,670 \cdot 2 = 8\,900$.

Б: $9{,}6 \cdot 20 \cdot 15 + 3\,200 \cdot 2 = 9\,280$.

В: $13{,}2 \cdot 15 \cdot 15 + 3\,250 \cdot 2 = 9\,470$.

Ответ: 8 900.

B6. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей. Диагонали ромба, изображённого на рисунке, равны 6 и 10.

Следовательно, $S_{\text{ромба}} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30$.

Ответ: 30.

B7. $2x-7+\sqrt{4x^2-20x+25}=2x-7+\sqrt{(2x-5)^2}=2x-7+|2x-5|$.
Подставим $x=2{,}5$, получим $2x-7+|2x-5|=-2$.
Ответ: -2.

B8. Если касательная параллельна прямой $y=0\cdot x+15$, то она параллельна оси абсцисс. Касательная к данному графику функции параллельна оси абсцисс в точках максимума и минимума, то есть в пяти точках.
Ответ: 5.

B9. Пусть a — сторона основания призмы, h — высота призмы (и цилиндра), R — радиус основания цилиндра.

$S_{\text{бок. пр.}}=4ah,\ \ 4ah=12,\ \ 8a=12,\ \ a=1{,}5.$

$2R=a,\ \ R=\frac{a}{2}=\frac{1{,}5}{2}=0{,}75.$

Ответ: 0,75.

B10. $l(t^\circ)=l_0(1+\alpha t^\circ)$, $10(1+1{,}2\cdot10^{-5}t^\circ)=10+11{,}4\cdot10^{-3}$, $10+12\cdot10^{-5}t^\circ=10+11{,}4\cdot10^{-3}$, $12\cdot10^{-5}t^\circ=11{,}4\cdot10^{-3}$, $t^\circ=\frac{11{,}4\cdot10^{-3}}{12\cdot10^{-5}}$, $t^\circ=0{,}95\cdot10^2$, $t^\circ=95$.
Ответ: 95.

B11. $y=(2-x)\cdot e^{2-x}$.
$y'=(2-x)'\cdot e^{2-x}+(2-x)\cdot\left(e^{2-x}\right)'=-e^{2-x}-(2-x)\cdot e^{2-x}=e^{2-x}\cdot(x-3)$.
$y'=0,\ x=3$.

В точке $x=3$ производная исходной функции обращается в ноль и при переходе через нее меняет знак с минуса на плюс, значит, $x=3$ — точка минимума исходной функции.
Ответ: 3.

B12. Пусть x деталей в час делает ученик, тогда $(x+1)$ деталь в час делает мастер; $\frac{126}{x+1}$ ч — время для изготовления 126 деталей мастером, $\frac{143}{x}$ ч— время для изготовления 143 деталей учеником. Составим уравнение: $\frac{126}{x+1}+2=\frac{143}{x}$; $126x+2x(x+1)=143(x+1)$; $2x^2-15x-143=0$; $x_1=13$, $x_2=-5{,}5$.

Так как по смыслу задачи $x>0$, то $x=13$.
Ответ: 13.

C1. $\begin{cases} x^2-\sqrt{x^2-x+10}=x+2, \\ y^2=x-2. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем: $x\geqslant 2$.

Решим первое уравнение системы.
$x^2 - x + 10 - \sqrt{x^2 - x + 10} - 12 = 0.$

Замена $\sqrt{x^2 - x + 10} = t,\ t \geqslant 0.$
$t^2 - t - 12 = 0$, отсюда
$t_1 = 4, \quad t_2 = -3 < 0.$
$\sqrt{x^2 - x + 10} = 4,$
$x^2 - x + 10 = 16,$
$x^2 - x - 6 = 0,$
$x_1 = 3, \quad x_2 = -2,$
x_2 не удовлетворяет условию $x \geqslant 2$.
$y^2 = 3 - 2,$
$y = \pm 1.$

Ответ: $(3; -1), (3; 1)$.

C2. Примем длину SH за единицу. Тогда $AC = BD = 2$, $AH = \dfrac{AC}{2} = 1$ (так как H — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$). Опустим из точки K перпендикуляр KM на $ABCD$. Имеем: $KM \parallel SH$; проекцией отрезка AS на ABC является отрезок $AH \Rightarrow M \in AH$.

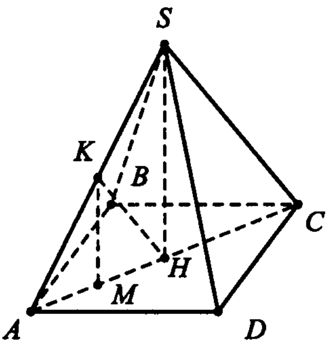


Рис. 121.

Из $\triangle ASH$ по теореме Пифагора: $AS = \sqrt{AH^2 + HS^2} = \sqrt{2}$.

$\triangle AKM \sim \triangle ASH$ (по I признаку: $\angle A$ общий, $\angle AKM = \angle ASH$ как собственные). Отсюда

$\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{KM}{SH} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{1}{3}$ (т.к. K делит AS в отношении $1 : 2$).

$AM = \dfrac{AH}{3} = \dfrac{1}{3}$; $KM = \dfrac{SH}{3} = \dfrac{1}{3}$; $MH = AH - MA = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Тогда тангенс искомого угла KHM может быть найден из $\triangle KHM$:

$\operatorname{tg}\angle KHM = \dfrac{KM}{MH} = \dfrac{1}{2}, \angle KHM = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

С3. $5^{x+\frac{2}{3}} - 8^x \geqslant 2^x \cdot 4^{x-1} + 5^{x-\frac{1}{3}}, \quad 5^{x+\frac{2}{3}} - 5^{x-\frac{1}{3}} \geqslant 8^x + \dfrac{1}{4}\cdot 8^x,$

$5^x\left(5^{\frac{2}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}\right) \geqslant \dfrac{5}{4}\cdot 8^x, \; 5^x\cdot 5^{-\frac{1}{3}}\cdot(5-1) \geqslant \dfrac{5}{4}\cdot 8^x, \; 5^x\cdot 4\cdot 5^{-\frac{1}{3}} \geqslant \dfrac{5}{4}\cdot 8^x,$

$\dfrac{8^x}{5^x} \leqslant 4\cdot 4\cdot 5^{-\frac{4}{3}}, \; \left(\dfrac{8}{5}\right)^x \leqslant \left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{4}{3}}, \; x \leqslant \dfrac{4}{3}.$

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right]$.

С4. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A, $K \in Ox$, $D \in Oy$ (см. рис. 122).

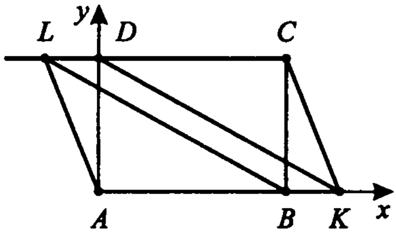


Рис. 122.

Пусть длина $BC = AD = k$. Тогда длина $AB = 3k$ и $A(0;0)$, $B(3k;0)$, $C(3k;k)$, $D(0;k)$.

Пусть $K(x;0)$. Тогда $\overrightarrow{KA}(-x;0)$; $\overrightarrow{KD}(-x;k)$; $\overrightarrow{KC}(3k-x;k)$.

По условию $\angle AKD = \angle CKD$, что равносильно равенству $\cos\angle AKD = \cos\angle CKD$. Выражая косинусы углов через скалярные произведения, получаем:

$$\frac{x^2}{|x|\cdot\sqrt{x^2+k^2}} = \frac{-x(3k-x)+k^2}{\sqrt{x^2+k^2}\cdot\sqrt{(3k-x)^2+k^2}},$$

$$|x| = \frac{x^2-3kx+k^2}{\sqrt{x^2-6kx+9k^2+k^2}},$$

$$|x|\sqrt{x^2-6kx+10k^2} = x^2-3kx+k^2,$$

$$x^2(x^2-6kx+10k^2) = x^4+9k^2x^2+k^4-6kx^3+2k^2x^2-6k^3x,$$

$$k^2x^2-6k^3x+k^4=0,$$

$\left(\frac{x}{k}\right)^2 - 6\frac{x}{k} + 1 = 0.$

Замена $\frac{x}{k} = t$. $t^2 - 6t + 1 = 0$, отсюда $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $x_{1,2} = (3 \pm 2\sqrt{2})k$.

Получили $AK = (3 \pm 2\sqrt{2})k$. Аналогично $CL = (3 \pm 2\sqrt{2})k$.

При $AK = CL$ имеем: $AKCL$ — параллелограмм, $S_{AKCL} = AK \cdot AD = (3 \pm 2\sqrt{2})k^2 = 3$ (по условию).

$(3 + 2\sqrt{2})k^2 = 3,$ $\qquad$ $(3 - 2\sqrt{2})k^2 = 3,$

$k^2 = \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}},$ $\qquad$ $k^2 = \frac{3}{3 - 2\sqrt{2}},$

$k^2 = \frac{3(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8}, k > 0,$ $\qquad$ $k^2 = \frac{3(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 8},$

$k = \sqrt{9 - 6\sqrt{2}} =$ $\qquad$ $k = \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} =$

$= \sqrt{6 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 3} =$ $\qquad$ $= \sqrt{6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 3} =$

$= \sqrt{6} - \sqrt{3}.$ $\qquad$ $= \sqrt{6} + \sqrt{3}.$

При $AK \neq CL$ имеем: $AKCL$ — трапеция,

$S_{AKCL} = \frac{1}{2}(AK + CL) \cdot AD = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2})k^2 = 3,$

$3k^2 = 3,\ \ k^2 = 1,\ \ k = 1.$

Ответ: $\sqrt{6} - \sqrt{3}$; 1; $\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

С5. Уравнение третьей степени с корнями x_1, x_2 и x_3 имеет вид

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0;$

$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_3 \cdot (x_1 + x_2)) \cdot x - x_1x_2x_3 = 0.$

Пусть данные уравнения имеют два общих корня x_1 и x_2, тогда

$3x^3 + bx^2 - 25 = (x - x_1)(x - x_2)(3x - x_3)$

и $x^3 - ax + 15 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)$,

где x_3 и x_4 — некоторые вещественные числа.

Обозначим $c = -(x_1 + x_2)$, $d = x_1x_2$, тогда $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + cx + d$, откуда имеем

$3x^3 + bx^2 - 25 = (x^2 + cx + d)(3x - x_3) = 3x^3 + (3c - x_3)x^2 + (3d - cx_3)x - dx_3$

и $x^3 - ax + 15 = (x^2 + cx + d)(x - x_4) = x^3 + (c - x_4)x^2 + (d - cx_4)x - dx_4$.

Получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} 3c - x_3 = b, & (1) \\ 3d - cx_3 = 0, & (2) \\ dx_3 = 25; & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} c - x_4 = 0, & (4) \\ d - cx_4 = -a, & (5) \\ dx_4 = -15. & (6) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнения (1), (3), (4) и (6).

$$\begin{cases} x_3 = 3c - b, \\ x_4 = c, \\ dx_3 = 25, \\ 3x_3 = -5x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(3c-b) = -5c, \\ x_4 = c, \\ x_3 = 3c - b, \\ dx_3 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{14}{3}c, \\ x_4 = c, \\ x_3 = -\dfrac{5}{3}c, \\ d = -\dfrac{15}{c}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в уравнение (2):

$$3 \cdot \left(-\frac{15}{c}\right) - c \cdot \left(-\frac{5}{3}c\right) = 0, \quad -\frac{9}{c} + \frac{c^2}{3} = 0, \quad c = 3.$$

Подставив $c = 3$ в остальные уравнения, получим $b = 14$, $d = -5$, $a = 14$. $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 + cx + d = x^2 + 3x - 5$, откуда $x_{1,2} = -1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{29}$.

Ответ: $a = 14$, $b = 14$, $x_{1,2} = -1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{29}$.

С6. Заметим, что если пара (x, y) является решением исходного уравнения, то пара $(x, -y)$ также является его решением, поэтому будем рассматривать только значения $y \geqslant 0$.

Рассмотрим два случая.

1) x чётно, то есть $x = 2n$, $n \in N$. В этом случае имеем $2^{2n} - y^2 = 63$, $(2^n - y)(2^n + y) = 63$.

Так как каждый множитель является целым числом и выражение $2^n + y$ принимает только положительные значения, то последнее уравнение равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^n - y = 7, \\ 2^n + y = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} 2^n - y = 3, \\ 2^n + y = 21, \end{cases} \\ \begin{cases} 2^n - y = 1, \\ 2^n + y = 63; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \cdot 2^n = 16, \\ 2y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \cdot 2^n = 24, \\ 2y = 18, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \cdot 2^n = 64, \\ 2y = 62; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n = 3, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} n = \log_2 3 + 2, \\ y = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} n = 5, \\ y = 31. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, в данном случае получаем решения исходного уравнения $(6; 1)$, $(6; -1)$, $(10; 31)$, $(10; -31)$.

2) x нечётно, то есть $x = 2n + 1$, $n \in N$. В этом случае 2^{2n+1} при

делении на три дает остаток 2, y^2 при делении на 3 дает остатки 1 или 0 (как квадрат целого числа), а число 63 делится на 3 нацело. Таким образом, в данном случае уравнение $2^x - y^2 = 63$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: $(6;1), (6;-1), (10;31), (10;-31)$.

Решение варианта №23

B1. Стоимость одного билета равна 300 рублей. Билет студента художественного училища стоит $0{,}4 \cdot 300 = 120$ рублей; 52 таких билета стоят $52 \cdot 120 = 6\,240$ рублей. Тогда остальные билеты стоят $(73 - 52) \cdot 300 =$ $= 6\,300$ рублей. Значит, в кассе должно быть $6\,240 + 6\,300 = 12\,540$ рублей.

Ответ: 12 540.

B2. За период с 28 января по 15 февраля среднесуточная скорость ветра не превышала 7,5 м/с в следующие дни: 28.01, 29.01, 31.01, 2.02 и 7.02. Итого 5 дней.

Ответ: 5.

B3. ОДЗ: $x \neq -\frac{4}{3}$.

$-x = \frac{x+6}{-3x-4}$; $3x^2 + 4x = x + 6$; $3x^2 + 3x - 6 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -2$.

Наименьший корень уравнения равен -2.

Ответ: -2.

B4. $\cos\angle ABC = \cos(180° - \angle CBH) = -\cos\angle CBH$ (см. рис. 123).

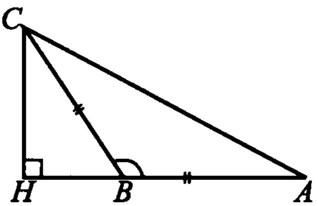


Рис. 123.

Так как $\cos\angle CBH = \frac{BH}{BC}$ и $AB = BC$, то $\cos\angle CBH = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$. Тогда $\cos\angle ABC = -0{,}8$.

Ответ: $-0{,}8$.

B5. Всего требуется заказать $50 \cdot 0{,}3 = 15$ (м^2) стекла. Заполним таблицу:

Фирма	**Цена 15 м^2 стекла (руб.)**	**Резка и шлифовка 50 стёкол (руб.)**	**Итого (руб.)**
А	$380 \cdot 15 = 5\,700$	$50 \cdot 81 = 4\,050$	9 750
Б	$410 \cdot 15 = 6\,150$	$50 \cdot 78 = 3\,900$	10 050
В	$415 \cdot 15 = 6\,225$	$50 \cdot 73 = 3\,650$	9 875

Самый дешёвый заказ будет стоить 9 750 рублей.

Ответ: 9 750.

B6. $S_{MBFN} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{NFD} - S_{BCF}$ (см. рис. 124).

$S_{ABCD} = 9 \cdot 6 = 54$; $S_{AMN} = \dfrac{7 \cdot 1}{2} = 3{,}5$; $S_{NFD} = \dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$; $S_{BCF} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$.

Итак, $S_{MBFN} = 54 - 3{,}5 - 3 - 13{,}5 = 34$.

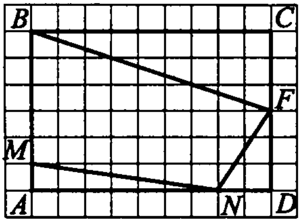


Рис. 124.

Ответ: 34.

B7. Учитывая условие $3 < a < 7{,}5$, получим:
$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2a-15)^2} = |a-2| + |a-3| + |2a-15| =$
$= a - 2 + a - 3 - 2a + 15 = 10$.

Ответ: 10.

B8. На промежутке $[-3; 10]$ точек экстремума функции $y = f(x)$ ровно пять. Сумма их абсцисс равна: $(-2) + (-1) + 2 + 4 + 8 = 11$.

Ответ: 11.

B9. Так как $S_{AA_1C_1C} = 2S_{AA_1N_1N}$, $S_{AA_1B_1B} = 2S_{AA_1M_1M}$ и $S_{BB_1C_1C} = 2S_{MM_1N_1N}$ (см. рис. 125), то
$S_{\text{бок.}ABCA_1B_1C_1} = S_{AA_1C_1C} + S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} =$
$= 2S_{AA_1N_1N} + 2S_{AA_1M_1M} + 2S_{MM_1N_1N} =$
$= 2S_{\text{бок.}AMNA_1M_1N_1} = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

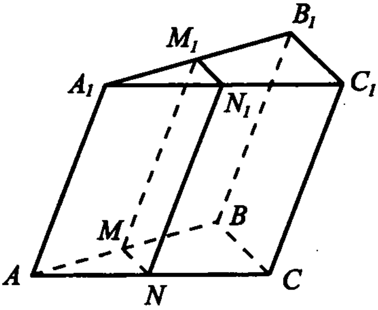


Рис. 125.

B10. При вращении ведёрка вода не будет выливаться из него, если в верхней точке траектории сила давления воды будет неотрицательна, то есть необходимо выполнение условия $P \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим: $m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geqslant 0$; $m\left(\frac{v^2}{0{,}729} - 10\right) \geqslant 0$; $v^2 \geqslant 10 \cdot 0{,}729$; $v^2 \geqslant 7{,}29$; $v \in (-\infty; -2{,}7] \cup [2{,}7; +\infty)$.

Так как по условию $v > 0$, то минимальная скорость, с которой надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, равна $v = 2{,}7$ (м/с).

Ответ: 2,7.

B11. $y = 6x - \log_2(x+6)^2 = 6x - 2\log_2(x+6)$, $y' = 6 - \frac{2}{(x+6)\ln 2}$.

При $x \in [-5{,}5;\ 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-5{,}5;\ 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает на его левой границе, то есть

$y_{\text{наим.}} = y(-5{,}5) = 6 \cdot (-5{,}5) - \log_2(0{,}5)^2 = -33 + 2\log_2 2 = -31$.

Ответ: -31.

B12. Пусть x деталей шлифует мастер за один час, тогда ученик за один час шлифует $(x-6)$ деталей. Тогда $\frac{264}{x}$ ч — время работы мастера,

$\frac{256}{x-6}$ ч — время работы ученика.

Составим и решим уравнение: $\frac{256}{x-6} - \frac{264}{x} = 4$, $(x-6) \neq 0$, $x \neq 0$.

$256x - 264(x-6) = 4x(x-6)$; $4x^2 - 16x - 1584 = 0$; $x^2 - 4x - 396 = 0$; $x_1 = 22$, $x_2 = -18$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: 22.

C1. $\begin{cases} 2\cos x - \sqrt{y+1} = 0, \\ 2^{2\sin x} + 4\sqrt{2} = 2^{\sin x + 2} + 2^{\sin x + \frac{1}{2}}. \end{cases}$

ОДЗ: $y+1 \geqslant 0$; $y \geqslant -1$.

Пусть $t = 2^{\sin x}$, $t > 0$. Тогда второе уравнение системы принимает вид: $t^2 + 4\sqrt{2} = 4t + \sqrt{2}t$; $t^2 - (4+\sqrt{2})t + 4\sqrt{2} = 0$. Его корни $t_1 = 4$, $t_2 = \sqrt{2}$. Значит,

$\left[\begin{array}{l} 2^{\sin x} = 4, \\ 2^{\sin x} = \sqrt{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 2, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$ (уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений, так как $|\sin x| \leqslant 1$).

Из первого уравнения системы следует уравнение $2\cos x = \sqrt{y+1}$. Следовательно, $\cos x \geqslant 0$. Значит, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ — корни второго уравнения системы, удовлетворяющие условию $\cos x \geqslant 0$. Тогда $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и первое уравнение системы принимает вид: $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{y+1}$. Его корень $y = 2$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ 2\right)$, $k \in Z$.

C2. В $\triangle ABC$ выполняется равенство $AB^2 = BC^2 + AC^2$ (см. рис. 126). Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle BCA = 90°$. Тогда $\cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.

Так как $AN = BN$, то $AN = 2{,}5$. Аналогично $CM = \frac{1}{2}CC_1 = \sqrt{6}$.

По теореме косинусов для $\triangle CNA$:

$CN^2 = AC^2 + AN^2 - 2 \cdot AC \cdot AN \cdot \cos\angle A = 9 + 6{,}25 - 2 \cdot 3 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{3}{5} = 6{,}25.$

Рассмотрим $\triangle MCN$. Так как исходная призма прямая, то $\angle MCN = 90°$. По теореме Пифагора $MN = \sqrt{CN^2 + MC^2} = \sqrt{6{,}25 + 6} = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

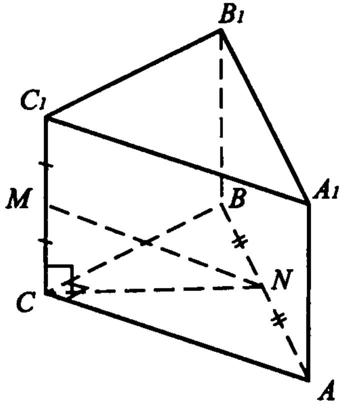


Рис. 126.

С3. $\sqrt{x-2}\cdot\log_{|x-3|}(x^2+x-5)\leqslant 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geqslant 0,\\ |x-3|\neq 0,\\ |x-3|\neq 1,\\ x^2+x-5>0;\end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 2,\\ x\neq 4, x\neq 2, x\neq 3,\\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2},\\ x>\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2};\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 2,\\ x\neq 3,\\ x\neq 4.\end{cases}$

Так как $\sqrt{x-2}\geqslant 0$, то достаточно найти решения неравенства $\log_{|x-3|}(x^2+x-5)\leqslant 0$, которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|<1,\\ x^2+x-5\geqslant 1,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|>1,\\ x^2+x-5\leqslant 1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant -3,\\ x\geqslant 2,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<2,\end{array}\right.\\ -3\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2<x<4,\\ -3\leqslant x<2.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим $x\in(2;3)\cup(3;4)$.

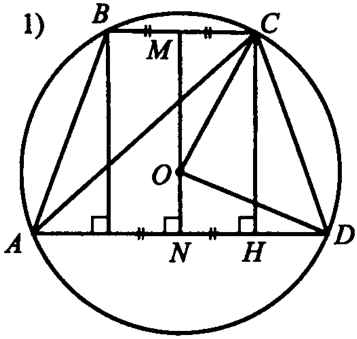
Ответ: $(2;3)\cup(3;4)$.

С4. Возможны два случая (см. рис. 127).

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}$;



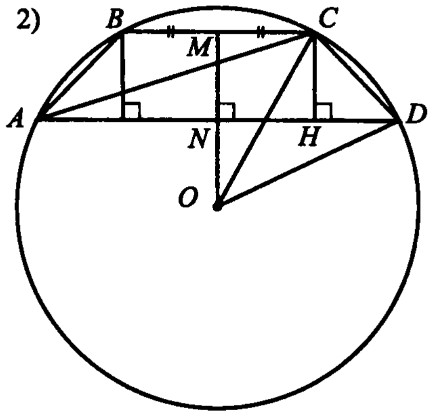


Рис. 127.

$$OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2};$$

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 1.$$

Так как $CH = MN = OM + ON = \frac{\sqrt{11}}{2} + 1$, то

$$AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{16 + \sqrt{11}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{11}}{2} - 1$. Тогда $AC = \sqrt{16 - \sqrt{11}}$.

Ответ: $\sqrt{16 \pm \sqrt{11}}$.

С5. Рассмотрим функции $f(x) = 4x^2 - 4x - (a^2 - 4a + 3)$ и $g(x) = ax(a-2+x) = ax^2 + a(a-2)x$. Их графиками при $a \neq 0$ являются параболы. Обозначим $D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 4a + 3) = 16(a-2)^2 \geqslant 0$ — дискриминант уравнения $f(x) = 0$.

I. Если $D = 0$, то неравенство $f(x) \leqslant 0$ имеет единственное решение. При $a = 2$ $x_0 = \frac{1}{2}$ — корень уравнения $f(x) = 0$. При этом любое действительное значение x удовлетворяет неравенству $g(x) = 2x^2 \geqslant 0$. Значит, $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

II. Если $D > 0$, то решением неравенства $f(x) \leqslant 0$ является отрезок

$[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$; $x_1, x_2 \in \left\{\frac{3-a}{2}; \frac{a-1}{2}\right\}$.

1) Если $a = 0$, то любое действительное число удовлетворяет неравенству $g(x) \geqslant 0$, а решением неравенства $f(x) \leqslant 0$ является отрезок $[-0{,}5; 1{,}5]$. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то при $a < 0$ решением неравенства $g(x) \geqslant 0$ является отрезок $[x_1'; x_2']$, а при $a > 0$ решением неравенства $g(x) \geqslant 0$ является множество $(-\infty; x_1'] \cup [x_2'; +\infty)$, где $x_1', x_2' \in \{0; 2-a\}$ — корни уравнения $g(x) = 0$.

Ровно одно решение неравенства $f(x) \leqslant 0$ может являться решением неравенства $g(x) \geqslant 0$, только когда одно из чисел x_1, x_2 совпадает с одним из чисел x_1', x_2'. Возможны четыре случая.

а) $\frac{3-a}{2} = 0$. Тогда $a = 3$. Из рисунка 128 следует, что $a = 3$ не удовлетворяет условию.

Рис. 128.

б) $\frac{3-a}{2} = 2-a$. Тогда $a = 1$. Из рисунка 129 следует, что два решения $x = 0$ и $x = 1$ неравенства $f(x) \leqslant 0$ являются решениями неравенства $g(x) \geqslant 0$. Значит, $a = 1$ не удовлетворяет условию.

Рис. 129.

в) $\frac{a-1}{2} = 0$. Тогда $a = 1$. Этот случай уже рассмотрен.

г) $\frac{a-1}{2} = 2-a$; $a = \frac{5}{3}$. Из рисунка 130 следует,

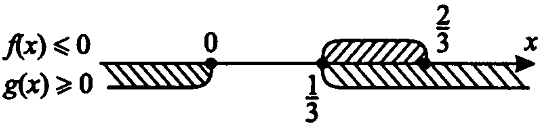


Рис. 130.

что $a = \frac{5}{3}$ не удовлетворяет условию.

Ответ: 2.

С6. Равенство $\left(\frac{1}{n^5}\right)^k = \left(\frac{1}{k^5}\right)^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $\left(\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)^5 = \left(\left(\frac{1}{k}\right)^n\right)^5$, то есть когда $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n \Leftrightarrow k\ln\frac{1}{n} = n\ln\frac{1}{k}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{k}\ln k = \frac{1}{n}\ln n \Leftrightarrow f(k) = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, $x > 0$.

Так как $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}$, то

$$\begin{cases} f'(x) \geqslant 0, 0 < x \leqslant e, \\ f'(x) \leqslant 0, x \geqslant e. \end{cases}$$

Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0; e]$ и убывает на интервале $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, то равенство $f(n) = f(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k < e < n$, то есть $k = 1$ или $k = 2$. При этом каждому значению k соответствует не более одного значения n.

Пусть $k = 1$. Тогда $f(n) = f(1)$; $\frac{1}{n}\ln n = 0$. Следовательно, $n = 1$. Противоречит тому, что $k < n$.

Пусть $k = 2$. Тогда $f(n) = f(2)$; $\frac{1}{n}\ln n = \frac{1}{2}\ln 2$. Этому уравнению удовлетворяет единственное значение $n = 4$.

Ответ: $k = 2; n = 4$.

Решение варианта №24

B1. Стоимость литра кефира до повышения цены равна
32,2 : 1,15 = 28 (руб.).

Ответ: 28.

B2. За период с 12 по 19 февраля наименьшая среднесуточная влажность воздуха составила 71%. Это значение влажности было достигнуто 19 февраля.

Ответ: 71.

B3. $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$; $x_1 = 2, x_2 = -4$. Наименьший корень уравнения равен -4.

Ответ: -4.

B4. $\operatorname{ctg}\angle ABC = \operatorname{ctg}(180° - \angle CBH) = -\operatorname{ctg}\angle CBH$ (см. рис. 131). Из $\triangle CBH$ найдём BH по теореме Пифагора: $BH = \sqrt{CB^2 - CH^2} =$ $= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда $\operatorname{ctg}\angle CBH = \frac{BH}{CH} = \frac{12}{5} = 2{,}4$;

$\operatorname{ctg}\angle ABC = -2{,}4$.

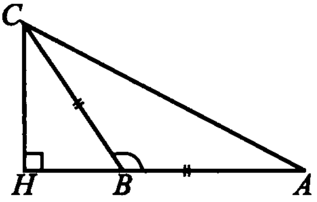


Рис. 131.

Ответ: $-2{,}4$.

B5. Всего требуется заказать $35 \cdot 0{,}44 = 15{,}4$ (м^2) стекла. Заполним таблицу:

Фирма	Цена 15,4 м^2 стекла (руб.)	Резка и шлифовка 35 стёкол (руб.)	Итого (руб.)
А	$540 \cdot 15{,}4 = 8\,316$	$80 \cdot 35 = 2\,800$	11 116
Б	$550 \cdot 15{,}4 = 8\,470$	$76 \cdot 35 = 2\,660$	11 130
В	$565 \cdot 15{,}4 = 8\,701$	$74 \cdot 35 = 2\,590$	11 291

Самый дешёвый заказ будет стоить 11 116 рублей.

Ответ: 11 116.

B6. $S_{ABCD} = S_{MNEF} - S_{AMB} - S_{BNC} - S_{DCE} - S_{ADF}$ (см. рис. 132).

$S_{MNEF} = 10 \cdot 7 = 70$; $S_{AMB} = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5$; $S_{BNC} = \dfrac{2 \cdot 6}{2} = 6$;

$S_{DCE} = \dfrac{1 \cdot 4}{2} = 2$; $S_{ADF} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24$.

Итак, $S_{ABCD} = 70 - 5 - 6 - 2 - 24 = 33$.

Ответ: 33.

B7. $\dfrac{18\sqrt[65]{\sqrt[33]{a}} - 11\sqrt[15]{\sqrt[143]{a}}}{14\sqrt[39]{\sqrt[55]{a}}} = \dfrac{18\sqrt[2145]{a} - 11\sqrt[2145]{a}}{14\sqrt[2145]{a}} =$

$= \dfrac{(18-11)\sqrt[2145]{a}}{14\sqrt[2145]{a}} = \dfrac{7}{14} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

B8. Количество точек максимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2; 9]$ равно двум. В этих точках $f'(x) = 0$ и при переходе через эти точки производная меняет знак с плюса на минус, то есть функция $f(x)$ меняет характер монотонности с возрастания на убывание.

Ответ: 2.

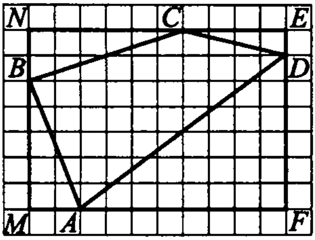


Рис. 132.

B9. $S_{\text{пов.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$ (см. рис. 133).

$S_{\text{осн.}} = S_{ABCD} = 8^2 = 64$, $S_{\text{бок.}} = 4S_{SDC} = 4 \cdot \dfrac{DC \cdot SK}{2}$.

$SK = \sqrt{SD^2 - \left(\dfrac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. $S_{\text{бок.}} = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 3}{2} = 48$.

$S_{\text{пов.}} = 48 + 64 = 112$.

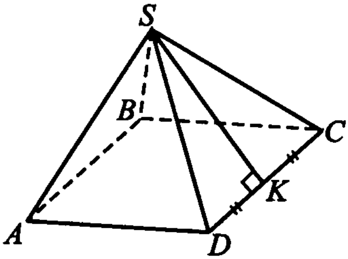


Рис. 133.

Ответ: 112.

B10. Момент инерции катушки не превышает предельного значения при выполнении условия $I \leqslant 2162{,}5$. Подставим исходные данные и решим неравенство.

$$\frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2) \leqslant 2162{,}5;$$

$$\frac{(3+2)\cdot 25^2}{2} + 1 \cdot (2 \cdot 25h + h^2) \leqslant 2162{,}5;$$

$5 \cdot 625 + 2 \cdot (50h + h^2) \leqslant 2 \cdot 2162{,}5$; $2 \cdot (50h + h^2) + 3125 - 4325 \leqslant 0$;
$2h^2 + 100h - 1200 \leqslant 0$; $h^2 + 50h - 600 \leqslant 0$; $-60 \leqslant h \leqslant 10$.

Максимальное значение h равно 10.

Ответ: 10.

B11. $y = 8x - \log_2(x+3)^2 = 8x - 2\log_2(x+3)$; $y' = 8 - \dfrac{2}{(x+3)\ln 2}$.
При $x \in [-2{,}5;\ 0]$ выполняется неравенство $y'(x) > 0$. Следовательно, на отрезке $[-2{,}5;\ 0]$ функция $y(x)$ возрастает. Значит, наименьшее значение на отрезке функция принимает на его левой границе, то есть
$y_{\text{наим.}} = y(-2{,}5) = 8\cdot(-2{,}5) - \log_2(0{,}5)^2 = -20 + 2\log_2 2 = -18$.

Ответ: -18.

B12. Пусть x литров воды в минуту пропускает вторая труба, тогда первая труба пропускает $(x-2)$ литров в минуту. Время для заполнения резервуара объёмом 675 литров для первой трубы равно $\dfrac{675}{x-2}$, для второй — $\dfrac{675}{x}$. Составим и решим уравнение: $\dfrac{675}{x-2} - \dfrac{675}{x} = 2$;
$675x - 675x + 1350 = 2x(x-2)$; $2x^2 - 4x - 1350 = 0$; $x^2 - 2x - 675 = 0$; $x_1 = 27, x_2 = -25$. Условию $x > 0$ удовлетворяет значение $x = 27$ (мин.).

Ответ: 27.

C1. $\begin{cases} |x - 2\sqrt{2}| - 2\sin y = 0, \\ 3^{\operatorname{ctg} y + 1} + 8 = 3^{1 - \operatorname{ctg} y}. \end{cases}$

Пусть $t = 3^{\operatorname{ctg} y}$, $t > 0$. Тогда второе уравнение системы принимает вид: $3t + 8 = \dfrac{3}{t}$; $3t^2 + 8t - 3 = 0$. Его корни $t_1 = -3$, $t_2 = \dfrac{1}{3}$, причём t_1 не удовлетворяет условию $t > 0$. Значит, $3^{\operatorname{ctg} y} = \dfrac{1}{3}$; $\operatorname{ctg} y = -1$; $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Из первого уравнения системы следует уравнение $|x - 2\sqrt{2}| = 2\sin y$. Следовательно, $\sin y \geqslant 0$. Значит, $y = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ — корни второго уравнения системы, удовлетворяющие условию $\sin y \geqslant 0$. Тогда $\sin y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, и первое уравнение системы принимает вид: $|x - 2\sqrt{2}| = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2\sqrt{2}, \\ x - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt{2} - x = \sqrt{2}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(3\sqrt{2};\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(\sqrt{2};\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

С2. Пусть a — прямая, о которой говорится в условии, точка M — середина стороны AB. По условию прямая a параллельна прямой CM_1 (см. рис. 134).

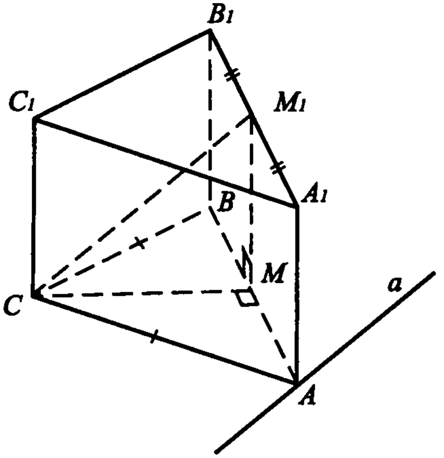


Рис. 134.

Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то $CC_1 \perp ABC$. Так как прямая AM лежит в плоскости ABC, то $AM \perp CC_1$.

$CM \perp AM$ как медиана равнобедренного треугольника ABC. Кроме того, $AM \perp CC_1$. Значит, $AM \perp MM_1C$, и, следовательно, $AM \perp CM_1$. Но $CM_1 \parallel a$, поэтому $AM \perp a$.

Так как $AM \perp MM_1C$, $AM \perp a$ и $a \parallel MM_1C$, то AM — искомое расстояние между прямыми a и CC_1. Значит, $AM = \frac{1}{2}AB = 5$.

Ответ: 5.

С3. $\dfrac{\log_{|x-2|}(3x+3-x^2)}{\sqrt{3x-x^2}} \leqslant 0.$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x - x^2 > 0, \\ 3x + 3 - x^2 > 0, \\ |x-2| \neq 0, \\ |x-2| \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}, \\ x \neq 2, x \neq 3, x \neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$

Так как на ОДЗ $\sqrt{3x-x^2}>0$, то достаточно найти решения неравенства $\log_{|x-2|}(3x+3-x^2)\leqslant 0$, которое равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|x-2|<1,\\ 3x+3-x^2\geqslant 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}|x-2|>1,\\ 3x+3-x^2\leqslant 1;\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1<x<3,\\ x^2-3x-2\leqslant 0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<1,\\ x>3,\end{array}\right.\\ x^2-3x-2\geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}1<x<3,\\ \left[\begin{array}{l}x\leqslant\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\\ x\geqslant\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$1<x<3$.

Учитывая ОДЗ, получим $x\in(1;2)\cup(2;3)$.

Ответ: $(1;2)\cup(2;3)$.

С4. Возможны два случая (см. рис. 135).

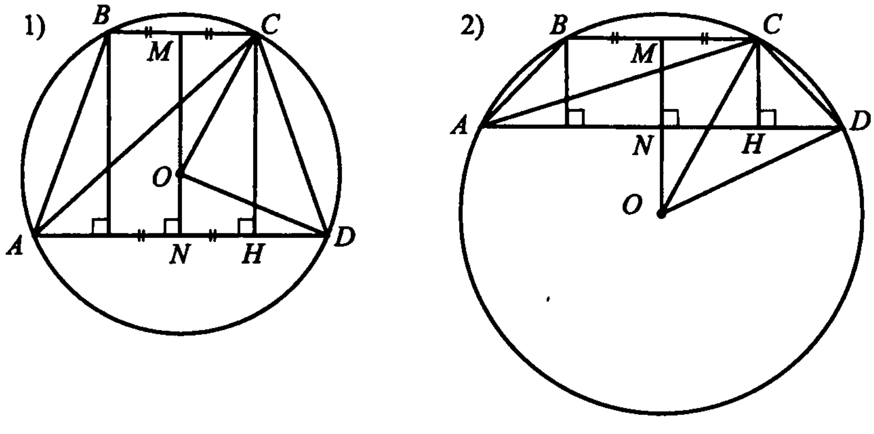


Рис. 135.

1. Центр описанной окружности точка O лежит внутри трапеции.

Пусть MN — высота трапеции $ABCD$, проходящая через середины оснований. Тогда, используя теорему Пифагора для соответствующих треугольников, получим:

$CD=\sqrt{DH^2+CH^2}$;

$OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$;

$ON=\sqrt{OD^2-DN^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=1$.

Так как $CH=MN=OM+ON=\dfrac{\sqrt{19}}{2}+1$, то

$$CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{2}+1\right)^2} = \sqrt{8+\sqrt{19}}.$$

2. Центр описанной окружности точка O лежит вне трапеции.

В данном случае рассуждения аналогичны п. 1 за исключением того, что $CH = MN = OM - ON = \frac{\sqrt{19}}{2} - 1$. Тогда $CD = \sqrt{8-\sqrt{19}}$.

Ответ: $\sqrt{8 \pm \sqrt{19}}$.

С5. Рассмотрим функции $f(x) = x^2 + (10+3a)x + (2a^2+12a+16)$ и $g(x) = ax(x-8-a) = ax^2 - a(a+8)x$. Их графиками при $a \neq 0$ являются параболы. Обозначим $D = (10+3a)^2 - 4(2a^2+12a+16) = (a+6)^2 \geqslant 0$ — дискриминант уравнения $f(x) = 0$.

I. Если $D = 0$, то неравенство $f(x) \leqslant 0$ имеет единственное решение. При $a = -6$ $x_0 = 4$ — корень уравнения $f(x) = 0$. При этом решением неравенства $g(x) \leqslant 0$ является множество $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$, которому принадлежит x_0. Значит, $a = -6$ удовлетворяет условию задачи.

II. Если $D > 0$, то решением неравенства $f(x) \leqslant 0$ является отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$; $x_1, x_2 \in \{-8-2a; -2-a\}$.

1) Если $a = 0$, то любое действительное число удовлетворяет неравенству $g(x) \leqslant 0$, а решением неравенства $f(x) \leqslant 0$ является отрезок $[-8; -2]$. Значит, $a = 0$ не удовлетворяет условию.

2) Если $a \neq 0$ и $a \neq -6$, то при $a < 0$ решением неравенства $g(x) \leqslant 0$ является множество $(-\infty; x_1'] \cup [x_2'; +\infty)$, а при $a > 0$ решением неравенства $g(x) \leqslant 0$ является отрезок $[x_1'; x_2']$, где $x_1', x_2' \in \{0; a+8\}$ — корни уравнения $g(x) = 0$.

Ровно одно решение неравенства $f(x) \leqslant 0$ может являться решением неравенства $g(x) \leqslant 0$, только когда одно из чисел x_1, x_2 совпадает с одним из чисел x_1', x_2'. Возможны четыре случая.

а) $-8 - 2a = 0$; $a = -4$. Из рисунка 136 следует, что $a = -4$ удовлетворяет условию.

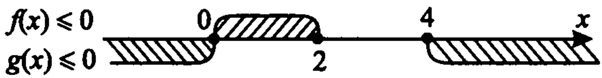


Рис. 136.

б) $-8-2a=a+8$; $a=-\dfrac{16}{3}$. Из рисунка 137 следует, что $a=-\dfrac{16}{3}$ не удовлетворяет условию.

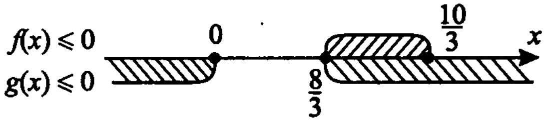


Рис. 137.

в) $-2-a=0$; $a=-2$. Из рисунка 138 следует, что $a=-2$ не удовлетворяет условию.

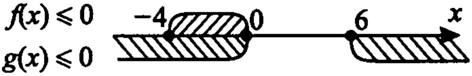


Рис. 138.

г) $-2-a=a+8$; $a=-5$. Из рисунка 139 следует, что $a=-5$ удовлетворяет условию.

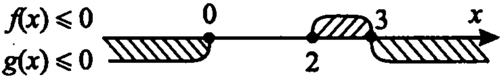


Рис. 139.

Ответ: -4; -5; -6.

С6. Равенство $\left(\sqrt{n^5}\right)^k=\left(\sqrt{k^5}\right)^n$ выполняется тогда и только тогда, когда $\left(n^k\right)^{\frac{5}{2}}=\left(k^n\right)^{\frac{5}{2}}$, то есть когда $n^k=k^n \Leftrightarrow k\ln n=n\ln k \Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{k}\ln k=\dfrac{1}{n}\ln n \Leftrightarrow f(k)=f(n)$, где $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$, $x>0$.

Так как $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\ln x-\ln e}{x^2}$, то

$$\begin{cases} f'(x)\geqslant 0, 0<x\leqslant e,\\ f'(x)\leqslant 0, x\geqslant e.\end{cases}$$

Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0;e]$ и убывает на интервале $[e;+\infty)$. Так как $k<n$, то равенство $f(n)=f(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $k<e<n$, то есть $k=1$ или $k=2$. При этом каждому значению k соответствует не более одного значения n.

Пусть $k=1$. Тогда $f(n)=f(1)$; $\dfrac{1}{n}\ln n=0$. Следовательно, $n=1$.

Противоречит тому, что $k < n$.

Пусть $k = 2$. Тогда $f(n) = f(2)$; $\frac{1}{n}\ln n = \frac{1}{2}\ln 2$. Этому уравнению удовлетворяет единственное значение $n = 4$.

Ответ: $k = 2; n = 4$.

Решение варианта №25

В1. Зарплата программиста после вычета 13%-го налога на доходы составит $(1 - 0{,}13) \cdot 35\,000 = 30\,450$ (руб).

Ответ: 30 450.

В2. Более 2 мм осадков выпадало 4, 10, 11 и 15 февраля. Всего 4 дня.

Ответ: 4.

В3. $2x^2 - 9x - 35 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-35)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{361}}{4} =$

$= \dfrac{9 \pm 19}{4}$; $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = 7$.

$x_1 + x_2 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

В4. $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$ (см. рис. 140). Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то $\angle ACB = \angle CAB$. Следовательно,

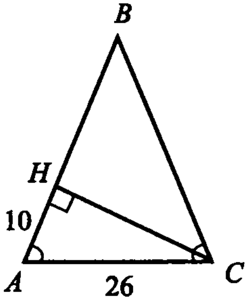


Рис. 140.

$\operatorname{tg}\angle ACB = \operatorname{tg}\angle CAB = \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

В5. Определим время (в часах), которое потребуется на дорогу с использованием разных видов транспорта.

Автобус: $\frac{1}{6} + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{12} + \frac{39}{12} + \frac{4}{12} = 3\frac{3}{4} = 3{,}75$ часа.

Электричка: $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}=2{,}25$ часа.

Маршрутное такси: $\frac{1}{4}+1\frac{5}{6}+\frac{5}{12}=\frac{3}{12}+\frac{22}{12}+\frac{5}{12}=\frac{30}{12}=2{,}5$ часа.

Наименьшее время равно 2,25 часа.

Ответ: 2,25.

B6. $S_{ABCD}=BH\cdot AD=4\cdot 8=32$ (см. рис. 141).

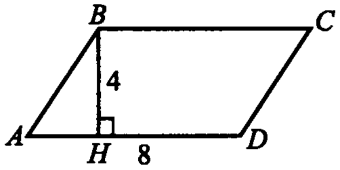


Рис. 141.

Ответ: 32.

B7. Так как $4+\log_3 6=\log_3 81+\log_3 6=\log_3 486$, то $3^{\log_3 486}=486$.

Ответ: 486.

B8. На графике производной видно, что на отрезке $[-7;2]$ производная дважды меняет знак в точках $x=-6$ и $x=0$, причём только в точке $x=-6$ он меняется с минуса на плюс. Значит, это точка минимума, так как в точке $x=-6$ характер монотонности функции $f(x)$ меняется с убывания на возрастание.

Ответ: 1.

B9. Апофема пирамиды равна $\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см. рис. 142). Площадь боковой грани равна $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12=60$. Тогда площадь всей боковой поверхности равна $6\cdot 60=360$.

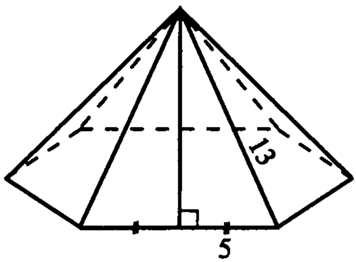


Рис. 142.

Ответ: 360.

B10. $m(t) \geqslant 2;\ \ 32 \cdot 2^{-\frac{t}{8}} \geqslant 2;\ \ 16 \cdot 2^{-\frac{t}{8}} \geqslant 1;\ \ 2^{\frac{t}{8}} \leqslant 16;\ \ \frac{t}{8} \leqslant 4;\ t \leqslant 32.$

Ответ: 32.

B11. $y' = 5 - \dfrac{5}{x+4}$. Уравнение $y' = 0$ имеет корень $x = -3$.

$y(-3) = 5\cdot(-3) - 5\ln 1 + 2 = -13;\ y(0) = 5\cdot 0 - 5\ln 4 + 2 = 2 - 10\ln 2.$ Так как $\ln 2 < 1;\ -10\ln 2 > -10;\ 2 - 10\ln 2 > -8$, то наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $[-3; 0]$ равно -13.

Ответ: -13.

B12. Пусть x литров в минуту пропускает первая труба, тогда $(x+4)$ литров в минуту пропускает вторая труба; t — время, за которое наполнится резервуар объёмом 375 литров.

По условию задачи составим систему уравнений.

$$\begin{cases} x(t+1) = 336, \\ (x+4)t = 375; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt + x = 336, \\ xt + 4t = 375; \end{cases} \Rightarrow 4t - x = 39;\ \ x = 4t - 39.$$

Подставляя выражение для переменной x в первое уравнение, получим: $4t^2 - 35t - 375 = 0;\ t_1 = 15, t_2 = -6{,}25$. Так как $t_2 < 0$, то $t = 15$.

Тогда $x(15+1) = 336;\ \ x = 21.$

Ответ: 21.

C1. ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1.$
Замена $t = \log_x y,\ t \neq 0$ приводит первое уравнение системы к виду $(t+2)\left(\frac{1}{t} - 1\right) = -2;\ t_1 = -1,\ t_2 = 2.$

1) $\log_x y = 2;\ y = x^2.$

2) $\log_x y = -1;\ y = \dfrac{1}{x}.$

Упрощая второе уравнение, получим $x^2 + 4y^2 - 5 = 0.$

1) При $y = x^2$ получим $4x^4 + x^2 - 5 = 0;\ z = x^2;\ 4z^2 + z - 5 = 0;\ z_1 = -\dfrac{5}{4}$ не удовлетворяет условию $z \geqslant 0;$
$z_2 = 1;\ x^2 = 1;\ x = \pm 1$ не удовлетворяет ОДЗ.

2) При $y = \dfrac{1}{x}$ получим $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5;$

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$ Только значение $x = 2$ удовлетворяет ОДЗ.

Тогда $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

C2. Пусть $a = AB = AC = BC$. Тогда длина окружности основания конуса равна $2\pi \cdot OC = 2\pi \cdot \frac{a}{2} = \pi a$ (см. рис. 143).

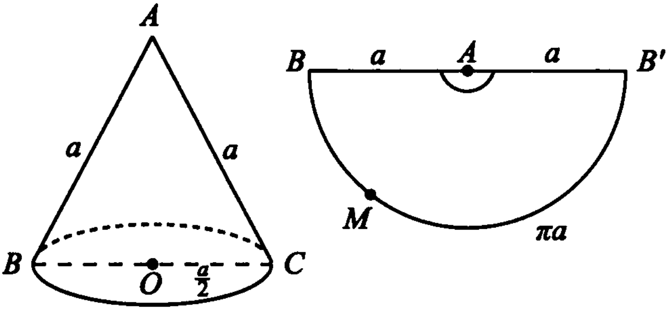


Рис. 143.

Так как длина дуги развёртки BMB' равна πa, а длина окружности с центром в точке A и радиусом a равна $2\pi a$, то видно, что длина дуги BMB' равна половине длины окружности. Значит, искомый угол равен 180°.

Ответ: 180°.

C3. $\log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) \geqslant 2$. Решим методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) = 2$.

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} |2x+3| \neq 0, \\ |2x+3| \neq 1, \\ x^2 - 10x + 9 > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty). \end{array}\right.$

На ОДЗ рассматриваемое уравнение равносильно уравнению

$x^2 - 10x + 9 = (2x+3)^2$; $-3x^2 - 22x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{22}{3}$.

Пусть $f(x) = \log_{|2x+3|}(x^2 - 10x + 9) - 2$. Решение исходного неравенства составляют те значения x, при которых $f(x) \geqslant 0$ (см. рис. 144).

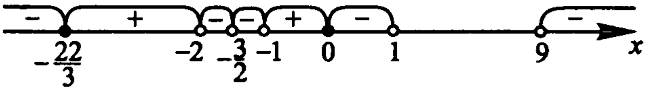


Рис. 144.

Ответ: $\left[-\frac{22}{3}; -2\right) \cup (-1; 0]$.

С4. Пусть $BE = EC$ и $AH = HD$ (см. рис. 145).

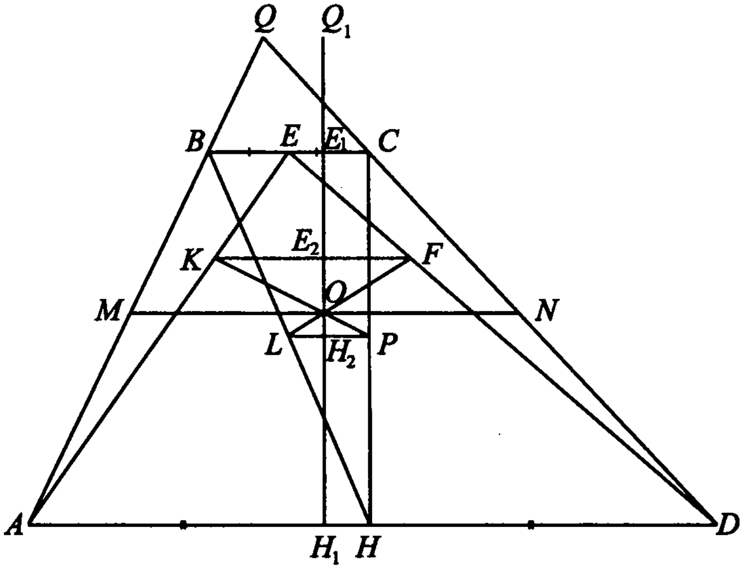


Рис. 145.

$\triangle HPL \sim \triangle HCB$, так как $\dfrac{HL}{HB} = \dfrac{HP}{HC} = \dfrac{1}{3}$ (L и P — точки пересечения медиан) и $\angle BHC$ — общий. Следовательно, $LP \parallel BC$. Аналогично доказывается, что $KF \parallel AD$. Значит, $LPFK$ — трапеция.

Пусть E_1H_1 — высота трапеции $ABCD$, проходящая через точку O. $\triangle EKF \sim \triangle EAD \Rightarrow \dfrac{KF}{AD} = \dfrac{KE}{AE} = \dfrac{1}{3}$ (K — точка пересечения медиан) $\Rightarrow KF = \frac{1}{3}AD = \frac{4}{3}$. Аналогично $LP = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}$.

$\triangle KOF \sim \triangle LOP \Rightarrow \dfrac{E_2O}{OH_2} = \dfrac{KF}{LP} = 4.$

Пусть $OH_2 = x$, тогда $E_2O = 4x$. Пусть $H_1H_2 = z$, тогда $E_1H_2 = 2z$, $E_1E_2 = y$ и $E_2H_1 = 2y$ (H_1H_2 — высота $\triangle LHP$, E_1H_1 — высота $\triangle BHC$ и $\triangle LHP \sim \triangle BHC$; для E_1E_2 и E_2H_1 аналогично).

Получим систему уравнений $\begin{cases} 2z = y + 5x, \\ 2y = z + 5x, \\ 3z = 3y. \end{cases}$

Отсюда $y = z = 5x$. Итак, $E_1O = E_1E_2 + E_2O = y + 4x = 9x$; $OH_1 = OH_2 + H_1H_2 = x + z = 6x$.

Пусть Q_1E_1 — высота $\triangle QBC$.

$$\triangle QBC \sim \triangle QAD \Rightarrow \frac{Q_1H_1}{Q_1E_1} = \frac{Q_1E_1 + E_1H_1}{Q_1E_1} = 1 + \frac{E_1H_1}{Q_1E_1} = \frac{AD}{BC} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{E_1H_1}{Q_1E_1} = 3 \Rightarrow Q_1E_1 = \frac{1}{3}E_1H_1 = \frac{1}{3}(E_1O + OH_1) = \frac{1}{3}(9x + 6x) = 5x.$$

$$\triangle QMN \sim \triangle QAD \Rightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{Q_1O}{Q_1H_1} = \frac{5x + 9x}{5x + 9x + 6x} = \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$MN = \frac{7}{10}AD = \frac{7}{10} \cdot 4 = 2{,}8.$$

Ответ: 2,8.

С5. Рассмотрим функции $f(x) = e^{x-a-2}$ и $g(x) = -x^2 - 5x + a$. Неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (см. рис. 146).

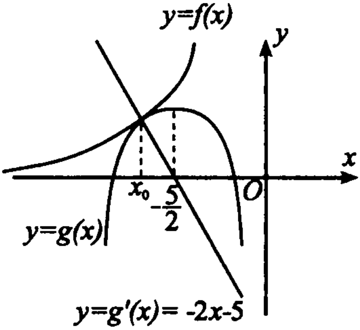


Рис. 146.

При этом для $x = x_0$ выполняются условия $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$

Так как $f(x) = f'(x) = e^{x-a-2}$, то $g(x_0) = g'(x_0)$. Таким образом, x_0 — меньший корень уравнения $g(x) = g'(x)$; $-x^2 - 5x + a = -2x - 5$;

$x^2 + 3x - (a+5) = 0$; $x_0 = \dfrac{-3 - \sqrt{29+4a}}{2}$.

Так как $f(x_0) = g(x_0)$, то $e^{-\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{29+4a} - a} = -2 + \sqrt{29+4a}$. Замена $t = \sqrt{29+4a}$, $a = \dfrac{t^2-29}{4}$ приводит к уравнению

$e^{-\frac{7}{2} - \frac{t}{2} - \frac{t^2-29}{4}} = -2 + t$; $e^{\frac{-t^2-2t+15}{4}} = t - 2$;

$-t^2 - 2t + 15 = 4\ln(t-2)$; $-(t+5)(t-3) = 4\ln(t-2)$. Видно, что $t = 3$ единственный корень этого уравнения. Итак, $\sqrt{29+4a} = 3$; $a = -5$.

Ответ: -5.

C6. Пусть k — искомое число. Тогда его можно записать в виде $k^2 = 100m^2 + n^2$, где $m, n \in N$. Так как $1 \leqslant n^2 < 100$, то $1 \leqslant n \leqslant 9$.

1) Пусть n — простое число, то есть $n \in \{2, 3, 5, 7\}$. Тогда $k^2 - 100m^2 = (k - 10m)(k + 10m) = n^2$. Так как $k - 10m < k + 10m$, то возможен единственный случай

$$\begin{cases} k - 10m = 1, \\ k + 10m = n^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 10m + 1, \\ 20m + 1 = n^2. \end{cases}$$

Система уравнений не имеет решений в натуральных числах, так как число $20m + 1$ оканчивается на 1, а ни одно из возможных значений n^2 не оканчивается на единицу.

2) Пусть n — составное чётное число, $n \in \{4, 6, 8\}$; $n = 2l$, $l \in N$. Тогда k — тоже чётное число, $k = 2p, p \in N$. Тогда $(p - 5m)(p + 5m) = l^2$, $l \in \{2, 3, 4\}$.

Если $l \in \{2, 3\}$, то, так как l — простое число и $p - 5m < p + 5m$, имеем $\begin{cases} p - 5m = 1, \\ p + 5m = l^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5m + 1, \\ 10m + 1 = l^2 \end{cases}$ — не имеет решений аналогично случаю 1).

Если $l = 4$, то $l^2 = 16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8$, то есть

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = 5m + 1, \\ 10m + 1 = 16, \end{cases} \\ \begin{cases} p = 5m + 2, \\ 10m + 2 = 8; \end{cases} \end{array} \right.$$ — нет решений аналогично случаю 1).

3) Если $n = 9$, то $n^2 = 1 \cdot 9^2 = 3 \cdot 27$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k - 10m = 1, \\ k + 10m = 9^2, \end{cases} \\ \begin{cases} k - 10m = 3, \\ k + 10m = 27; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 10m + 1, \\ 20m + 1 = 81, \end{cases} \\ \begin{cases} k = 10m + 3, \\ 20m + 3 = 27. \end{cases} \end{array} \right.$$

Первая система имеет единственное решение $m = 4, k = 41$. Тогда $k^2 = 1681$. Вторая система не имеет решений в натуральных числах.

Ответ: 1681.

Решение варианта №26

B1. Три лимона стоят $7 \cdot 3 = 21$ рубль. Но за эти деньги по акции можно купить 4 лимона. Так как $100 : 21 = 4\frac{16}{21}$, то за $21 \cdot 4 = 84$ рубля можно купить $4 \cdot 4 = 16$ лимонов и ещё останется $100 - 84 = 16$ рублей за которые можно купить ещё 2 лимона. Таким образом, всего можно купить 18 лимонов.

Ответ: 18.

B2. Если в какой-то день не было осадков, то в этот день их суммарное за период времени количество не изменялось. По графику определяем, что 7, 13 и 15 октября осадков не выпадало.

Ответ: 3.

B3. $\cos\frac{\pi(4x-7)}{3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{\pi(4x-7)}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $4x - 7 = \pm 2 + 6k$;

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 9 + 6k, \\ 4x = 5 + 6k; \end{array}\right. \quad k \in Z.$$

Выбираем наименьший положительный корень: $\left[\begin{array}{l} 4x = 3, \text{ при } k = -1, \\ 4x = 5, \text{ при } k = 0; \end{array}\right.$

$x = \frac{3}{4}$.

Ответ: 0,75.

B4. $CH^2 = CB^2 - HB^2 = 64 - 28 = 36$, $CH = 6$ (см. рис. 147).

$\triangle ABC \sim \triangle CHB \Rightarrow \angle A = \angle HCB \Rightarrow$

$$\cos\angle A = \cos\angle HCB = \frac{CH}{CB} = \frac{6}{8} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

B5. Определим время (в часах), которое потребуется на дорогу с использованием разных видов транспорта.

Автобус: $\frac{1}{12} + 3\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + 3\frac{2}{12} + \frac{3}{12} = 3\frac{6}{12} = 3{,}5$ часа.

Электричка: $\frac{1}{3} + 2\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{4}{12} + 2\frac{1}{12} + \frac{4}{12} = 2\frac{9}{12} = 2{,}75$ часа.

Маршрутное такси: $\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12} + 2\frac{6}{12} + \frac{3}{12} = 3$ часа.

Наименьшее время равно 2,75 часа.

Ответ: 2,75.

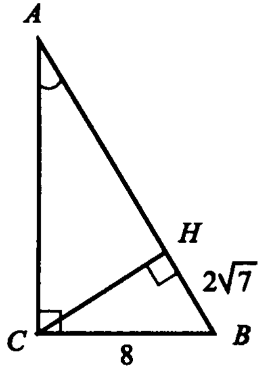


Рис. 147.

B6. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $S_{ABCD} = AH \cdot BC =$
$= 8 \cdot 4 = 32$ (см. рис. 148).

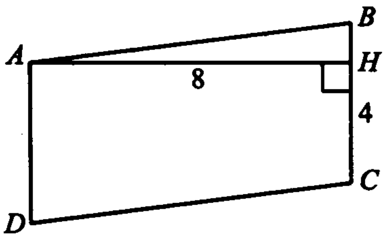


Рис. 148.

Ответ: 32.

B7. Так как $2 + \log_4 121 = \log_2 4 + \log_2 11 = \log_2 44$, то $2^{\log_2 44} = 44$.

Ответ: 44.

B8. Производная в точке касания равна тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox (см. рис. 149). Значит,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ABC) = -\operatorname{tg}\angle ABC = -\frac{AC}{BC} = -\frac{9}{10}.$$

Ответ: $-0{,}9$.

B9. Объём куба равен $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, а объём вырезанной части равен $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}04$. Тогда объём оставшейся части равен $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

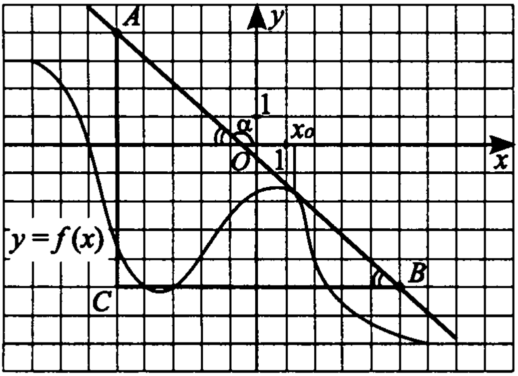


Рис. 149.

B10. Пусть m_1 — масса мальчика. Тогда масса отца равна $m_2 = 2m_1$. Пусть также v_1 — скорость того из них, который врезается в стоящего неподвижно; а v — их совместная скорость после столкновения.

В первом случае:

$$m_1\vec{v_1} = (m_1 + m_2)\vec{v};\ m_1\vec{v_1} = 3m_1\vec{v};\ \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{v_1};$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + Q_1;\ Q_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{3m_1\frac{1}{9}v_1^2}{2} = \frac{1}{3}m_1v_1^2.$$

Во втором случае:

$$m_2\vec{v_1} = (m_1 + m_2)\vec{v};\ 2m_1\vec{v_1} = 3m_1\vec{v};\ \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{v_1};$$

$$\frac{2m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + Q_2;\ Q_2 = m_1v_1^2 - \frac{3m_1\frac{4}{9}v_1^2}{2} = \frac{1}{3}m_1v_1^2.$$

Таким образом, $Q_2 - Q_1 = 0$.

Ответ: 0.

B11. $y' = \left(3x - 3\ln(x+2)\right)' = 3 - \dfrac{3}{x+2}$. Уравнение $y' = 0$ имеет корень $x = -1$. Так как $y' < 0$ при $x \in [-1{,}5; -1)$, то функция $y(x)$ убывает на отрезке $[-1{,}5; -1]$. Следовательно, наименьшее значение равно $y(-1) = 3\cdot(-1) - \ln 1^3 = -3$.

Ответ: -3.

B12. Пусть v — скорость мотоциклиста, t — время, за которое он проехал весь путь.

По условию задачи составим систему уравнений.

$$\begin{cases} (v+25)\cdot(t-1{,}5)=156, \\ vt=156; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vt+25t-1{,}5v-37{,}5=156, \\ vt=156; \end{cases} \Rightarrow$$

$25t-1{,}5v-37{,}5=0$; $v=\dfrac{50t-75}{3}$. Подставим во второе уравнение.

$\dfrac{50t^2-75t}{3}=156$; $50t^2-75t-468=0$; $t_1=3{,}9$, $t_2=-2{,}4$. Так как $t>0$, то $t=3{,}9$. Тогда $v=\dfrac{156}{3{,}9}=40$.

Ответ: 40.

C1. ОДЗ: $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$.
Замена $t=\log_x y$, $t\neq 0$ приводит первое уравнение системы к виду $(t-6)\left(\dfrac{1}{t}-1\right)=2$; $t_1=2$, $t_2=3$.

1) $\log_x y=2$; $y=x^2$. Тогда второе уравнение примет вид
$2-\log_2 x=3$; $\log_2 x=-1$; $x=\dfrac{1}{2}$; $y=x^2=\dfrac{1}{4}$.

2) $\log_x y=3$; $y=x^3$. Тогда второе уравнение примет вид
$3-\log_2 x=3$; $\log_2 x=0$; $x=1$ — не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$.

C2. Пусть r — радиус полукруга (см. рис. 150). Тогда длина окружности основания конуса равна $\dfrac{1}{2}\cdot(2\pi r)=\pi r$. Отсюда, $BO=\dfrac{r}{2}$ — радиус основания конуса. Значит, $\triangle ABC$ — равносторонний. Поэтому искомый угол равен 60°.

Ответ: 60°.

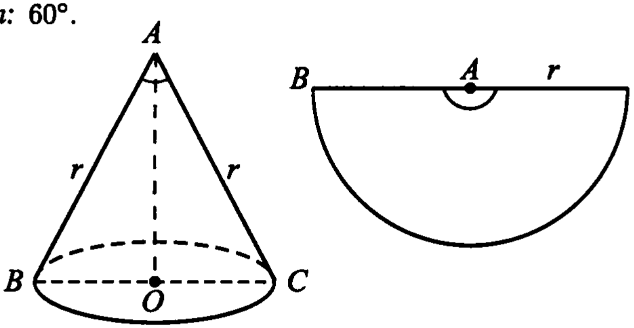


Рис. 150.

С3. Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим уравнение $\log_{|3x+2|}(x^2-5x+4)=2$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} |3x+2|=0, \\ |3x+2|\neq 1, \\ x^2-5x+4>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\frac{2}{3}, \\ x\neq -\frac{1}{3}, \\ x\neq -1, \\ x\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty). \end{cases}$$

На ОДЗ рассматриваемое уравнение равносильно уравнению

$$x^2-5x+4=(3x+2)^2; \quad -8x^2-17x=0; \quad x_1=0, \ x_2=-\frac{17}{8}.$$

Обозначим $f(x)=\log_{|3x+2|}(x^2-5x+4)-2$. Решение исходного неравенства составляют те значения x, при которых $f(x)\geqslant 0$ (см. рис. 151).

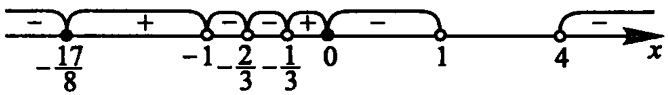


Рис. 151.

Ответ: $\left[-\frac{17}{8};-1\right)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right]$.

С4. Пусть $BE=EC$ и $AH=HD$ (см. рис. 152).

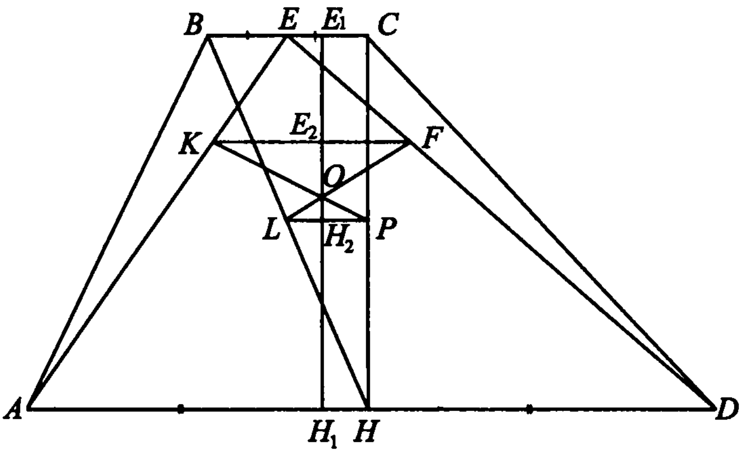


Рис. 152.

$\triangle HPL \sim \triangle HCB$, так как $\frac{HL}{HB} = \frac{HP}{HC} = \frac{1}{3}$ (L и P — точки пересечения медиан) и $\angle BHC$ — общий. Следовательно, $LP \parallel BC$. Аналогично доказывается, что $KF \parallel AD$. Значит, $LPFK$ — трапеция.

Пусть E_1H_1 — высота трапеции $ABCD$, проходящая через точку O. $\triangle EKF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{KF}{AD} = \frac{KE}{AE} = \frac{1}{3}$ (K — точка пересечения медиан) $\Rightarrow KF = \frac{1}{3}AD = \frac{5}{3}$. Аналогично $LP = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}$.

$\triangle KOF \sim \triangle LOP \Rightarrow \frac{E_2O}{OH_2} = \frac{KF}{LP} = \frac{5}{2}$.

Пусть $OH_2 = 2x$, $E_2O = 5x$; $H_1H_2 = z$, $E_1H_2 = 2z$; $E_1E_2 = y$, $E_2H_1 = 2y$ (H_1H_2 — высота $\triangle LHP$, E_1H_1 — высота $\triangle BHC$ и $\triangle LHP \sim \triangle BHC$; для E_1E_2 и E_2H_1 аналогично).

Получим систему уравнений $\begin{cases} 2z = y + 7x, \\ 2y = z + 7x, \\ 3z = 3y. \end{cases}$

Отсюда $y = z = 7x$. Итак, $E_1O = E_1E_2 + E_2O = y + 5x = 12x$; $OH_1 = OH_2 + H_1H_2 = 2x + z = 9x$.

Тогда $\frac{E_1O}{OH_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Ответ: 4 : 3.

С5. Рассмотрим функции $f(x) = e^{x+b+3}$ и $g(x) = -x^2 - 3x + b$. Неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (см. рис. 153).

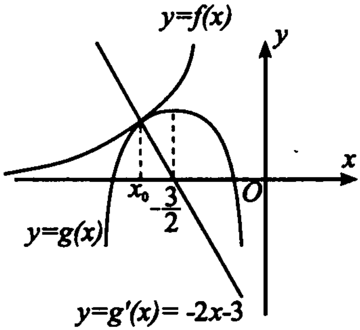


Рис. 153.

При этом для $x = x_0$ выполняются условия $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$

Так как $f(x) = f'(x) = e^{x+b+3}$, то $g(x_0) = g'(x_0)$. Таким образом, x_0 — меньший корень уравнения $g(x) = g'(x)$; $-x^2 - 3x + b = -2x - 3$; $x^2 + x - (b+3) = 0$; $x_0 = \dfrac{-1 - \sqrt{4b+13}}{2}$.

Так как $f(x_0) = g(x_0)$, то $e^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4b+13} + b} = -2 + \sqrt{4b+13}$. Замена $t = \sqrt{4b+13}$, $b = \dfrac{t^2 - 13}{4}$ приводит к уравнению

$e^{\frac{5}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2-13}{4}} = -2 + t$; $e^{\frac{t^2-2t-3}{4}} = t - 2$;
$t^2 - 2t - 3 = 4\ln(t-2)$; $(t+1)(t-3) = 4\ln(t-2)$. Видно, что $t = 3$ единственный корень этого уравнения. Итак, $\sqrt{4b+13} = 3$; $b = -1$.

Ответ: -1.

С6. Пусть k^2 — искомое шестизначное число.

Тогда $k^2 = 1000n^2 + m^2$, где $k, n, m \in N$. Так как k^2 — шестизначное число, то $100\,000 \leqslant k^2 < 1\,000\,000$; $317 \leqslant k \leqslant 999$. Так как n^2 — трёхзначное число, а m^2 — не более, чем трёхзначное, то $100 \leqslant n^2 \leqslant 999$; $10 \leqslant n \leqslant 31$ и $1 \leqslant m^2 \leqslant 999$; $1 \leqslant m \leqslant 31$.

Так как n^2 — количество тысяч числа k^2, то наименьшее число, удовлетворяющее условию, соответствует наименьшему возможному значению n.

1) Пусть $n = 10$. Тогда $k^2 - m^2 = 1000n^2$;
$(k-m)(k+m) = 100\,000 = 2^5 \cdot 5^5$.

Из ограничений, накладываемых на числа k и m, получим условия:

$$\begin{gathered} k - m < k + m;\ 286 \leqslant k - m \leqslant 998; 318 \leqslant k + m \leqslant 1030; \\ 317 \leqslant k \leqslant 999;\ 1 \leqslant m \leqslant 31. \end{gathered} \tag{1}$$

Проверкой убеждаемся, что любое разложение числа $2^5 \cdot 5^5$ на произведение двух множителей не удовлетворяет условиям (1).

2) Пусть $n = 11$. Тогда $(k-m)(k+m) = 1000 \cdot 11^2 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$. Проверкой убеждаемся, что любое разложение числа $2^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ на произведение двух множителей не удовлетворяет условиям (1).

3) Пусть $n = 12$. Тогда $(k-m)(k+m) = 1000 \cdot 12^2 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Существует 5 возможных случаев, удовлетворяющих условиям (1):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k-m=3\cdot 5^3=375,\\ k+m=2^7\cdot 3=384,\end{cases}\\ \begin{cases}k-m=2^2\cdot 3\cdot 5^2=300,\\ k+m=2^5\cdot 3\cdot 5=480,\end{cases}\\ \begin{cases}k-m=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360,\\ k+m=2^4\cdot 5^2=400,\end{cases}\\ \begin{cases}k-m=2^5\cdot 3^2=288,\\ k+m=2^2\cdot 5^3=500,\end{cases}\\ \begin{cases}k-m=2^6\cdot 5=320,\\ k+m=2\cdot 3^2\cdot 5^2=450,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k,\ m\notin Z,\\ m=90,\ k=390,\\ m=20,\ k=380,\\ m=106,\ k=394,\\ m=65,\ k=385.\end{array}\right.$$

Только значение $k = 380$ удовлетворяет условиям (1). Значит, $k^2 = 380^2 = 144\,400$.

Ответ: 144 400.

Решение варианта №27

B1. После повышения цены товар будет стоить $180 \cdot 1{,}15 = 207$ рублей. $1000 : 207 = 4\frac{172}{207}$, значит, можно будет купить 4 единицы товара.

Ответ: 4.

B2. По графику определяем: 35° — наибольшая температура.

Ответ: 35.

B3. $\log_2(x+1) = 2$. ОДЗ: $x + 1 > 0$; $x > -1$.

Тогда $x + 1 = 2^2$, $x + 1 = 4$; $x = 3$.

Ответ: 3.

B4. $AB = BC \cdot \operatorname{tg} C = 5 \cdot 2{,}4 = 12$ (см. рис. 154);
$AC = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{169} = 13$.

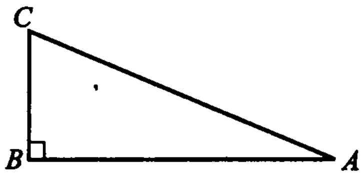


Рис. 154.

Ответ: 13.

B5. Посчитаем стоимость всех покупок и выберем самую дешевую:

1. $3\,100 \cdot 90 + 12\,000 = 291\,000$ (руб) — самая низкая цена.
2. $3\,400 \cdot 90 = 306\,000$ (руб).

3. $3\,200 \cdot 90 + 10\,000 = 298\,000$ (руб).

Ответ: 291 000.

B6. $BC = 3$, $AD = 7$, $BH = 5$ (см. рис. 155).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{3+7}{2} \cdot 5 = 25.$$

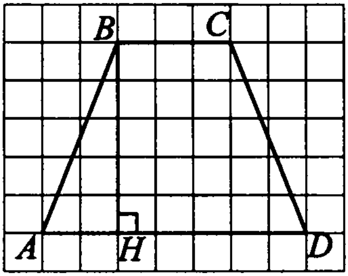


Рис. 155.

Ответ: 25.

B7. $\log_3 81 + \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 \left(81 \cdot \frac{1}{9}\right) = \log_3 9 = 2.$

Ответ: 2.

B8. Функция возрастает на промежутке $[-2; 3]$, который и является самым длинным. Длина этого промежутка возрастания равна 5.

Ответ: 5.

B9. Пусть S — площадь основания первой пирамиды, а h — её высота, тогда $\frac{1}{3}Sh = V_1$, следовательно, $V_2 = \frac{1}{3}(6S)\left(\frac{1}{3}h\right) = 2V_1 = 2 \cdot 24 = 48$ м^3.

Ответ: 48.

B10. $h(t) \geqslant 2$, $-t^2 + 3t \geqslant 2$; $t^2 - 3t + 2 \leqslant 0$; $t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$, $t \in [1; 2]$.

Итак, тело находилось на высоте не менее двух метров $2 - 1 = 1$ секунду.

Ответ: 1.

B11. Пусть $g(x) = \log_2 x$, тогда $g(x)$ возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Пусть $p(g) = g^2 - 4g - 3$, тогда $p(g)$ убывает на промежутке

$\left[\log_2 \frac{1}{2}; \log_2 2\right] = [-1; 1]$. Итак, $y(x) = p(g(x))$ убывает на промежутке

$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, значит, наибольшее значение принимает при $x = \frac{1}{2}$.

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2^2 \frac{1}{2} - 4\log_2 \frac{1}{2} + 3 = 1 + 4 + 3 = 8.$

Ответ: 8.

B12. Пусть $x\%$ начислял банк ежегодно, тогда сумма вклада увеличивалась каждый год в $\frac{100+x}{100}$ раз. За два года она увеличилась в $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2$ раз, следовательно, $2000\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 4380{,}8;$ $\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = 2{,}1904;$

$\frac{100+x}{100} = 1{,}48, \quad 100 + x = 148, \quad x = 48.$

Ответ: 48.

C1. $\begin{cases} 25^x = 30 - 5^x, \\ 6\sqrt{3}\cos y = x + 2. \end{cases}$

Пусть $t = 5^x$, тогда первое уравнение системы примет вид $(5^x)^2 = 30 - 5^x$, $t^2 = 30 - t$, $t^2 + t - 30 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 5, \\ t = -6, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} 5^x = 5, \\ 5^x = -6; \end{array}\right.$ $x = 1.$

Подставив $x = 1$ во второе уравнение, получим

$6\sqrt{3}\cos y = 3, \quad \cos y = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad y = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $\left(1; \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k\right), \ k \in Z.$

C2. Пусть O — центр окружности, тогда $R = OA = \frac{24}{2} = 12,$

$AC = \frac{AB}{2} = 8$ (см. рис. 156). $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}.$

OS — высота конуса, значит, OC является проекцией OS на плоскость основания, тогда так как $OC \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах SC также перпендикулярна AB, следовательно, $\angle OCS$ — искомый.

$\operatorname{tg}\angle OCS = \sqrt{\frac{125}{80}} = 1{,}25.$

Ответ: 1,25.

C3. ОДЗ: $\begin{cases} 1 - x^2 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

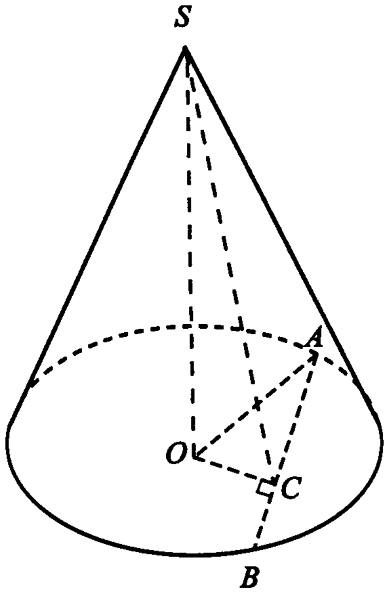


Рис. 156.

$4\log_{x+1}(1-x^2) - \frac{1}{4}\cdot 16\log^2_{x+1}|x-1| \geqslant 5;$

$4(\log_{x+1}(1-x) + \log_{x+1}(x+1) - \log^2_{x+1}|x-1|) \geqslant 5.$
Учитывая ОДЗ, получим $|x-1| = 1-x$.

$\log_{x+1}(1-x) + 1 - \log^2_{x+1}(1-x) \geqslant \frac{5}{4};$

$\log^2_{x+1}(1-x) - \log_{x+1}(1-x) + \frac{1}{4} \leqslant 0.$

Пусть $\log_{x+1}(1-x) = t$, тогда последнее неравенство примет вид $t^2 - t + \frac{1}{4} \leqslant 0;\quad 4t^2 - 4t + 1 \leqslant 0; (2t-1)^2 \leqslant 0; t = \frac{1}{2}.$

Вернёмся к исходной переменной: $\log_{x+1}(1-x) = \frac{1}{2};\ 1-x = \sqrt{x+1};$ $1 - 2x + x^2 = x + 1;\ x^2 - 3x = 0;\ x_1 = 0, x_2 = 3.$

Ни одно из полученных решений не принадлежит ОДЗ, значит, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: нет решений.

С4. Продолжим BC за точку C до пересечения с прямой AK (см. рис. 157). $\angle FAD = \angle AFB = \angle BAF$, тогда $AB = BF = 4$. $\triangle BFK$ подобен $\triangle AKD$ по трём углам с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AD}{BF} = \dfrac{12}{4} = 3$.

Значит $\dfrac{AK}{KF} = 3$; $KF = 1{,}6$; $AF = 6{,}4$.

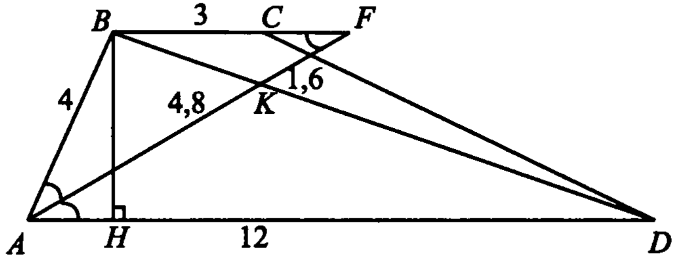


Рис. 157.

В $\triangle ABF$ найдём $\cos ABF$ по теореме косинусов.
$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2\cos\angle ABF \cdot AB \cdot BF$;
$40{,}96 = 16 + 16 - 32\cos ABF$; $\cos\angle ABF = -0{,}28$.

Тогда $\cos\angle BAD = -\cos\angle ABF = 0{,}28$; $\sin\angle BAD = 0{,}96$, откуда $BH = AB \cdot \sin\angle BAD = 4 \cdot 0{,}96 = 3{,}84$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{3 + 12}{2} \cdot 3{,}84 = 28{,}8.$$

Ответ: 28,8.

С5. Область допустимых значений параметра a:

$\begin{cases} 15 - 2a - a^2 \geqslant 0, \\ 5 - (\cos\sqrt{15 - 2a - a^2} + 4) \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + 2a - 15 \leqslant 0, \\ \cos\sqrt{15 - 2a - a^2} \neq 1; \end{cases}$

$a^2 + 2a - 15 < 0$; $-5 < a < 3$.

$-1 \leqslant \cos\sqrt{15 - 2a - a^2} < 1$, $0 < 5-(\cos\sqrt{15 - 2a - a^2}+4) \leqslant 2$. Так как знаменатель положителен, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in (-2; 1)$ $x^2 + 4(a - 1)x + 4a^2 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 4(a-1)x + 4a^2$. Её графиком является парабола.

Рассмотрим три случая.

1) $D < 0$ — неравенство выполняется при всех x.

$D = (4(a - 1))^2 - 4 \cdot 4a^2 < 0$; $16a^2 - 32a + 16 - 16a^2 < 0$; $32a > 16$; $a > \dfrac{1}{2}$.

2) $D = 0$, $32a = 16$, $a = \frac{1}{2}$.

В этом случае $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ и неравенство $f(x) > 0$ выполняется при любом $x \in (-2; 1)$.

3) $D > 0$. Условие задачи выполняется в двух случаях (см. рис. 158):

а) абсцисса вершины параболы меньше -2 и $f(-2) \geqslant 0$;

б) абсцисса вершины параболы больше 1 и $f(1) \geqslant 0$.

Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2(a-1) < -2, \\ a^2 - 2a + 3 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -2(a-1) > 1, \\ 1 + 4a - 4 + 4a^2 \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 2, \\ a \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} a < \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant -1{,}5, \\ a \geqslant 0{,}5; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$a \in (-\infty; -1{,}5] \cup (2; +\infty)$.

Объединяя решения, полученные в каждом из случаев, и учитывая область допустимых значений параметра a, получим $(-5; -1{,}5] \cup [0{,}5; 3)$.

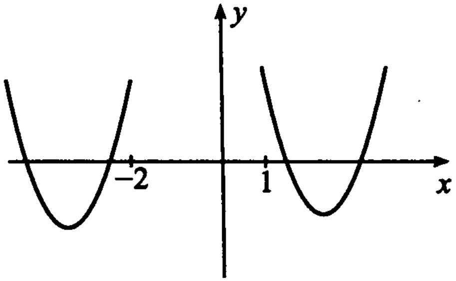


Рис. 158.

Ответ: $(-5; -1{,}5] \cup [0{,}5; 3)$.

С6. Подставим $y = b - ax$ в первое уравнение, получим $x^2 - 4(b-ax)^2 = 1$; $x^2 - 4b^2 + 8abx - 4a^2x^2 = 1$; $(1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0$.

Исходная система разрешима при любом b тогда и только тогда, когда при любом b разрешимо последнее уравнение.

Рассмотрим два случая.

1. $a = \pm 0{,}5$. Последнее уравнение примет вид $\pm 4bx = 4b^2 + 1$ — не разрешимо при $b = 0$, то есть не удовлетворяет условию.

2. $a \neq \pm 0{,}5$. При любом b должно выполняться $D \geqslant 0$.

$(4ab)^2 - (4a^2 - 1)(4b^2 + 1) \geqslant 0$;

$16a^2b^2 - 16a^2b^2 - 4a^2 + 4b^2 + 1 \geqslant 0;$
$4a^2 \leqslant 4b^2 + 1.$

Так как последнее неравенство должно выполняться для любого b, получим $4a^2 \leqslant 1$; $|a| \leqslant 0{,}5$. Так как $a = \pm 0{,}5$ не удовлетворяет условию, то окончательно имеем $-0{,}5 < a < 0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5; 0{,}5)$.

Решение варианта №28

B1. После повышения цены билет будет стоить $500 \cdot 1{,}15 = 575$ рублей. $5000 : 575 = 8\frac{400}{575}$, значит, можно будет купить 8 билетов.

Ответ: 8.

B2. По графику определяем: 19° — наибольшая температура 25 сентября.

Ответ: 19.

B3. $2^{2x-4} = 16$; $2^{2x-4} = 2^4$; $2x - 4 = 4$; $2x = 8$; $x = 4$.

Ответ: 4.

B4. $AB = BC \cdot \operatorname{tg} C = 4 \cdot 0{,}75 = 3$ (см. рис. 159);
$AC = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

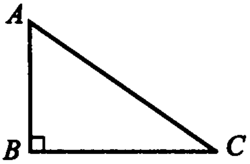


Рис. 159.

Ответ: 5.

B5. Посчитаем стоимость всех покупок и выберем самую дешёвую:

1. $190 \cdot 150 + 10\,000 = 38\,500$ (руб).
2. $210 \cdot 150 + 8\,000 = 39\,500$ (руб).
3. $220 \cdot 150 = 33\,000$ (руб) — самая низкая цена.

Ответ: 33 000.

B6. $AC = BD = 4$ см (см. рис. 160). Так как это ромб, то его площадь равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

Ответ: 8.

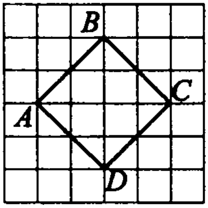


Рис. 160.

В7. $\log_4 8 + \log_9 81 = \dfrac{3}{2}\log_2 2 + 2 = 3{,}5.$

Ответ: 3,5.

В8. Функция убывает на промежутке $[-1; 4]$, который и является самым длинным. Длина этого промежутка убывания равна 5.

Ответ: 5.

В9. Пусть R — радиус основания первой пирамиды, а h — её высота, тогда $\frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1$, значит, $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{4} \cdot (2R)^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = V_1 = 18$ м^3.

Ответ: 18.

В10. $h(t) \geqslant 9$, $-3t^2 + 12t \geqslant 9$; $t^2 - 4t + 3 \leqslant 0$; $t_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$, $t \in [1; 3]$. Итак, тело находилось на высоте не менее 9 метров $3 - 1 = 2$ секунды.

Ответ: 2.

В11. Каждая из функций $g(x) = 2^{2x}$ и $p(x) = 2^x - 2$ возрастает на промежутке $[-1; 2]$. Тогда их сумма $y = p(x) + g(x)$ также возрастает на промежутке $[-1; 2]$, значит, наименьшее значение принимает при $x = -1$.

$y(-1) = 2^{-2} + 2^{-1} - 2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} - 2 = -1{,}25.$

Ответ: $-1{,}25$.

В12. Пусть $x\%$ начислял банк ежегодно, тогда сумма вклада увеличивалась каждый год в $\dfrac{100+x}{100}$ раз. За два года она увеличилась в $\left(\dfrac{100+x}{100}\right)^2$ раз, следовательно, $1500\left(\dfrac{100+x}{100}\right)^2 = 1949{,}4$; $\left(\dfrac{100+x}{100}\right)^2 = 1{,}2996$;

$\dfrac{100+x}{100} = 1{,}14, \quad 100 + x = 114, \quad x = 14.$

Ответ: 14.

C1. $\begin{cases} 9^x = 3^x + 72, \\ 2\sqrt{3}\sin y = x + 1. \end{cases}$

Пусть $t = 3^x$, тогда первое уравнение системы примет вид $(3^x)^2 = 3^x + 72$, $t^2 = t + 72$, $t^2 - t - 72 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 9, \\ t = -8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x = 9, \\ 3^x = -8; \end{array}\right.$ $x = 2$.

Подставив $x = 2$ во второе уравнение, получим $2\sqrt{3}\sin y = 3$, $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\left(2; (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

C2. Пусть O — центр окружности, тогда $R = OA = \frac{26}{2} = 13$, $AC = \frac{AB}{2} = 12$ (см. рис. 161). $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$. $OS = R \cdot \operatorname{tg} \angle OKS = 13 \cdot 8 = 104$.

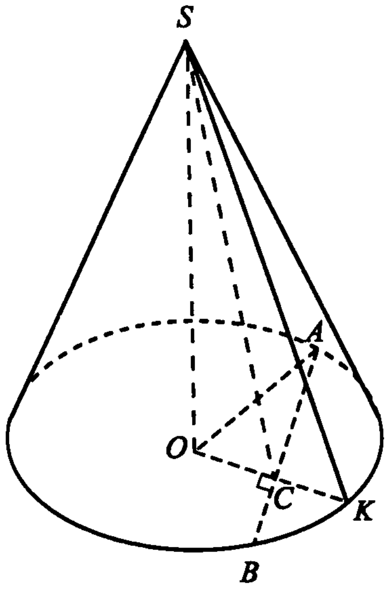


Рис. 161.

OS — высота конуса, тогда OC является проекцией OS на плоскость основания, значит, так как $OC \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикуля-

рах OS также перпендикулярна AB, следовательно, $\angle OCS$ — искомый.
$\operatorname{tg}\angle OCS = \frac{104}{5} = 20{,}8$.

Ответ: 20,8.

С3. ОДЗ: $\begin{cases} 4-x^2>0, \\ x+2>0, \\ x+2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2<x<2, \\ x\neq -1. \end{cases}$

$2\log_{x+2}(4-x^2) - \frac{1}{4}\cdot 4\log^2_{x+2}|x-2| \geqslant 3;$

$2\log_{x+2}(2-x) + 2\log_{x+2}(x+2) - \log^2_{x+2}|x-2| \geqslant 3.$

Учитывая ОДЗ, получим $|x-2| = 2-x$.
$2\log_{x+2}(2-x) + 2 - \log^2_{x+2}(2-x) \geqslant 3;$
$\log^2_{x+2}(2-x) - 2\log_{x+2}(2-x) + 1 \leqslant 0.$

Пусть $\log_{x+2}(2-x) = t$, тогда последнее неравенство примет вид $t^2-2t+1\leqslant 0$; $(t-1)^2\leqslant 0$, $t=1$.

Вернёмся к исходным переменным: $\log_{x+2}(2-x)=1$; $x+2=2-x$; $x=0$.

$x=0$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 0.

С4. Проведём высоту BH (см. рис. ??).

В прямоугольном $\triangle ABH$ BH лежит против угла в 30°, значит
$BH = \frac{1}{2}AB = 1{,}5\sqrt{3}$. $AD = \frac{S_{ABCD}}{BH} = \frac{9\sqrt{3}}{1{,}5\sqrt{3}} = 6.$

В $\triangle ACD$ $\angle ADC = 150°$, $\cos\angle ADC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

По теореме косинусов имеем:
$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2\cos\angle ADC\cdot AD\cdot CD =$
$= 36 + 27 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3} = 63+54 = 117;$ $AC=\sqrt{117}$.

Ответ: $\sqrt{117}$.

С5. Область допустимых значений параметра a:
$\begin{cases} 6-a-a^2\geqslant 0, \\ 3-(\cos\sqrt{6-a-a^2}+2)\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+a-6\leqslant 0, \\ \cos\sqrt{6-a-a^2}\neq 1; \end{cases}$ $a^2+a-6<0;$
$-3<a<2$.

$-1\leqslant\cos\sqrt{6-a-a^2}<1$, $0<3-(\cos\sqrt{6-a-a^2}+2)\leqslant 2$.

Так как знаменатель больше нуля, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы для всех $x\in(-1;1)$

$x^2 + 2(a-1)x + a^2 > 0.$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2+2(a-1)x+a^2$. Ее графиком является парабола.

Рассмотрим два случая.

1) $D < 0$ — неравенство выполняется при всех x.

$D = (2(a-1))^2 - 4 \cdot a^2 < 0;\quad 4a^2 - 8a + 4 - 4a^2 < 0;\quad 8a > 4;\quad a > \frac{1}{2}.$

2) $D \geqslant 0;\ a \leqslant \frac{1}{2}$. Условие задачи выполняется в двух случаях (см. рис. 162):

а) абсцисса вершины параболы меньше либо равна -1 и $f(-1) \geqslant 0$;

б) абсцисса вершины параболы больше либо равна 1 и $f(1) \geqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -(a-1) \leqslant -1, \\ 1 - 2a + 2 + a^2 \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -(a-1) \geqslant 1, \\ 1 + 2a - 2 + a^2 \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant -1 - \sqrt{2}, \\ a \geqslant -1 + \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$a \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$. Так как в этом случае $a \leqslant \frac{1}{2}$, то $a \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}]$.

Объединяя решения, полученные в каждом из случаев, и учитывая область допустимых значений параметра a, получим $(-3; -1 - \sqrt{2}] \cup (0{,}5; 2)$.

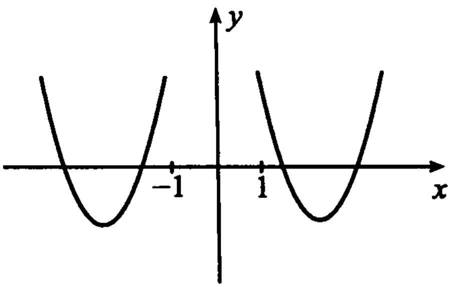


Рис. 162.

Ответ: $(-3; -1 - \sqrt{2}] \cup (0{,}5; 2)$.

С6. Подставим $y = ax - a + b = a(x-1) + b$ в первое уравнение, получим

$x^2 = a^2(x-1)^2 + 2ab(x-1) + b^2 + 2;$

$x^2 = a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + 2abx - 2ab + b^2 + 2;$

$(a^2-1)x^2+(-2a^2+2ab)x+(a-b)^2+2=0.$

Исходная система разрешима при любом b тогда и только тогда, когда при любом b разрешимо последнее уравнение.

Рассмотрим два случая.

1. $a=\pm 1$.

При $a=1$ последнее уравнение примет вид $-2x(1-b)+(b-1)^2+2=0$. Оно не разрешимо при $b=1$.

При $a=-1$ последнее уравнение примет вид $-2x(1+b)+(b+1)^2+2=0$. Оно не разрешимо при $b=-1$.

Таким образом, $a=\pm 1$ не удовлетворяет условию.

2. $a\neq\pm 1$.

При любом b должно выполняться $D\geqslant 0$.

$(-a+ab)^2-((a-b)^2+2)(a^2-1)\geqslant 0;$

$a^2(b-1)^2+((a-b)^2+2)(1-a^2)\geqslant 0.$

Последнее неравенство должно выполняться для любых значений b. Подставив $b=1$, получим $((a-1)^2+2)(1-a^2)\geqslant 0$, откуда следует $1-a^2\geqslant 0;\quad a^2\leqslant 1;\quad |a|\leqslant 1.$

При найденных a неравенство $a^2(b-1)^2+((a-b)^2+2)(1-a^2)\geqslant 0$ выполняется при любых b, значит, найденные значения параметра a удовлетворяют условию, и только они.

Учитывая, что $a\neq\pm 1$, окончательно получим $-1<a<1$.

Ответ: $(-1;1)$.

Литература

1. Единый государственный экзамен по математике. Кодификатор элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

2. Единый государственный экзамен по математике. Спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

3. Единый государственный экзамен по математике. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников по математике для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2009. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

4. *Лысенко Ф. Ф. и др.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011. Под редакцией *Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова.* — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — 416 с.

5. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; среднее (полное) общее образование. 2004 г. (Приказ МО РФ от 05.03.04 №1089).

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. РЕШЕБНИК ПОДГОТОВКА К ЕГЭ-2011

Учебно-методическое пособие

Под редакцией ***Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова***

Художественное оформление,
разработка серии *И. Лойкова*
Компьютерная верстка *Л. Шверида*
Корректор *М. Федорова*

Подписано в печать 18.08.2010.
Формат $60x84^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,16.
Тираж 20 000 экз. Заказ № **289.**

ООО «ЛЕГИОН-М»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в ЗАО «Полиграфобъединение». 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.